

---

# ESCUELA DE CIENCIAS

## DEPARTAMENTO DE FISICA Y MATEMATICAS

### Métodos Numéricos

### MA 318

---

#### INFORMACION DE LA MATERIA

Nombre:	Métodos Numéricos
Depto. que la ofrece:	Física y Matemáticas
Clave y unidades:	MA-318-SITE

#### DESCRIPCION DEL CURSO

Se estudian los principales problemas numéricos de la ingeniería reforzando el entendimiento de los métodos y el uso de la computadora como herramienta fundamental.

#### OBJETIVO DEL CURSO

##### Objetivo general:

Desarrollar en el estudiante la capacidad de seleccionar, aplicar y programar los métodos numéricos más apropiados a problemas de la ingeniería.

##### Objetivos específicos:

Al terminar el curso el estudiante será capaz de:

Evaluar la conveniencia en el uso de un cierto método en la solución a un problema numérico específico.

Implementar en un programa relacionados con los tópicos estudiados independientemente del lenguaje y plataforma computacional disponible.

#### CONTENIDO DEL CURSO

##### Contenido Sintético:

1. Conceptos básicos del Análisis Numérico
2. Matrices y Ecuaciones Lineales Simultáneas
3. Raíces de una Ecuación
4. Raíces Reales de Sistemas de Ecuaciones no Lineales
5. Integrales Definidas
6. Diferenciación
7. Ecuaciones Diferenciales Ordinaria de Primer Orden

## **Contenido Detallado: (en revisión)**

### **1. Conceptos Básicos del Análisis Numérico**

- 1.1 Error Absoluto
- 1.2 Error relativo
  - 1.2.1 Error relativo aproximado
- 1.3 Error de redondeo y aritmética de computadora
  - 1.3.1 Error de redondeo
- 1.4 Error de truncamiento

### **2. Matrices y Ecuaciones Lineales Simultáneas**

- 2.1 Determinantes y matrices
  - 2.1.1 Cálculo del determinante de A
    - 2.1.2 Propiedades de los determinantes
    - 2.1.3 Cofactores
    - 2.1.4 Matrices
      - 2.1.4.1 Operaciones con matrices
      - 2.1.4.2 Propiedades de la suma
      - 2.1.4.3 Multipliación
      - 2.1.4.4 Propiedades de la multiplicación
      - 2.1.4.5 Matriz inversa
      - 2.1.4.6 Propiedades de la matriz inversa
      - 2.1.4.7 Inversa de matrices cuadradas utilizando la matriz aumentada
- 2.2 Solución de ecuaciones lineales simultáneas
  - 2.2.1 Eliminación Gaussiana simple
  - 2.2.2 Eliminación de Gauss-Jordan
- 2.3 Estrategias de pivoteo
  - 2.3.1 Pivoteo parcial o pivoteo de columna máxima
  - 2.3.2 Pivoteo parcial escalado o pivoteo de escalado de columna
- 2.4 Factorización de matrices
  - 2.4.1 Método de Doolittle o Método de Crout
- 2.5 Aplicación de Matrices
- 2.6 Mínimos cuadrados
  - 2.6.1 Aproximación Lineal con Mínimos cuadrados
  - 2.6.2 Aproximación Polinomial con Mínimos Cuadrados
  - 2.6.3 Aproximación Multilineal con Mínimos Cuadrados

### **3. Raíces de una ecuación**



- 3.1 [Métodos preliminares](#)
- 3.2 [Método de bisección o bisecciones sucesivas o búsqueda binaria](#)
  - 3.2.1 [Fórmula para determinar el número de bisecciones necesarias para cierto intervalo](#)
- 3.3 [Interpolación Lineal Inversa o de la Falsa Posición y método de la Secante](#)
  - 3.3.1 [Interpolación Lineal Inversa o Método de la Falsa Posición](#)
  - 3.3.2 [Método de la secante](#)
- 3.4 [Iteración o Método iterativo de punto fijo](#)
  - 3.4.1 [Iteración: Convergencia](#)
  - 3.4.2 [Iteración Razón de convergencia](#)
- 3.5 [Método de Newton o Método de Newton-Raphson](#)
- 3.6 [Raíces complejas](#)

#### **4. Raíces Reales de Sistemas de ecuaciones no lineales**

- 4.1 [El método de descenso más rápido](#)
  - 4.2 [Iteración](#)
  - 4.3 [Método de Newton](#)
  - 4.4 [Polinomios de Interpolación](#)
    - 4.4.1 [Polinomios de Interpolación de Newton Lagrange o Diferencias Divididas](#)
    - 4.4.2 [Polinomios de Interpolación de Lagrange](#)

#### **5. Integrales Definidas**

- 5.1 [La regla Rectangular, Trapezoidal y de Simpson](#)
  - 5.1.1 [Regla del Trapecio](#)
    - 5.1.1.1 [Regla del Trapecio compuesto](#)
  - 5.1.2 [Regla de Simpson de 1/3 Simple](#)
    - 5.1.2.1 [Simpson 1/3 Compuesto](#)
  - 5.1.3 [Regla de Simpson 3/8](#)
- 5.2 [Integrales definidas problemáticas](#)
- 5.3 [Otra fórmula de Newton-Cotes](#)
  - 5.3.1 [Integración de Romberg](#)
  - 5.3.2 [Integración de Gauss-Legendre](#)

#### **6. Diferenciación**

- 6.1 [Operadores en diferencia](#)
- 6.2 [Fórmulas de diferencia hacia adelante](#)
- 6.3 [Fórmulas de diferencia centrales](#)
- 6.4 [Errores en diferenciación numéricas](#)

#### **7. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden**

- 7.1 [Ecuaciones diferenciales y en diferencias](#)
- 7.2 [Método de Euler](#)
- 7.3 [Método de Euler-Romberg](#)

### **METODO DE ENSEÑANZA**

El curso se desarrollará a través de la exposición oral de los temas por parte del profesor, con la amplia participación del alumno en las discusiones promovidas en las clases y en la solución de problemas bajo la guía del profesor.

## **AUXILIARES DIDACTICOS**

Material audiovisual  
Corrillos de discusión

## **SECUENCIA**

Cursos antecedentes:     MA 227

## **ESTRUCTURA DEL CURSO**

Horas de clase a la semana:     3  
Horas de laboratorio:             0  
Unidades:                             6

## **TEXTO(S) RECOMENDADO(S):**

- 1.-    Métodos Numéricos  
      W.Allen Smith  
      Prentice Hall Hispanoamericana
- 2.-    Métodos Numéricos  
      Federico Dominguez
- 3.-    Análisis Numérico  
      Burden

[Regreso a index](#)





# 1.0 -Conceptos Básicos de Numérico

---

## Objetivo de Métodos Numéricos

El objetivo de Métodos Numéricos es resolver problemas numéricos complejos utilizando operaciones simples de la aritmética, con el fin de desarrollar y evaluar métodos para calcular resultados numéricos a partir de los datos proporcionados. Los métodos de cálculo se denominan algoritmos.

---

## Error

Tipos de error:

- 1) Error absoluto
- 2) Error relativo o Error relativo Aproximado
- 3) Error por redondeo
- 4) Error por truncamiento

[Regreso a la página principal](#)

---

## 1.1 Error absoluto

Si  $p^*$  es una aproximación de  $p$ , y si  $p$  es el valor real, entonces: Error Absoluto= $|p - p^*|$  o sea el valor absoluto de  $p$  menos  $p^*$ .

Debido a que la ecuación se dio en términos del valor absoluto, el error absoluto no es negativo. Así pues, una colección (suma) de errores siempre se incrementan juntos, sin reducirse. Este es un hecho muy pesimista, dado que el redondeo y otros errores rara vez están en la misma dirección, es posible que la suma (álgebraica) de errores sea cero, con aproximadamente la mitad de los errores positiva y la otra mitad negativa. Pero también es demasiado optimista esperar que errores con signo sumen cero a menudo. Un enfoque realista es suponer que los errores, en especial el redondeo, están estadísticamente distribuidos.

---

## 1.2 Error relativo

$$\frac{|p - p^*|}{|p|}$$

El Error relativo se define como: Error relativo =  $\frac{|p - p^*|}{|p|}$  con la condición de  $p \neq 0$ . Generalmente el denominador es una de tres elecciones; la magnitud del valor exacto o real, la magnitud del valor calculado o aproximado o el promedio de estas dos cantidades. La mayoría de las veces se usa como el valor real, por lo que se usará esta opción. El Error Relativo es una mejor medida del error que el error absoluto, en especial cuando se utilizan sistemas numéricos de punto flotante. Puesto que los elementos de un sistema de punto flotante no están distribuidos de manera uniforme, la cantidad de redondeos posibles depende de la magnitud de los números que se redondean. El denominador de esta ecuación compensa este efecto.

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned} 1) p &= 0.3 \times 10^1 \\ p^* &= 0.31 \times 10^1 \\ \text{Error\_absoluto} &= |0.3 \times 10^1 - 0.31 \times 10^1| = |3.0 - 3.1| = |0.1| = 0.1 \\ \text{Error\_relativo} &= \frac{|0.3 \times 10^1 - 0.31 \times 10^1|}{|0.3 \times 10^1|} = \frac{0.1}{3} = 0.33 \end{aligned}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{aligned} p &= 0.3 \times 10^{-3} \\ p^* &= 0.31 \times 10^{-3} \\ \text{Calcular el error absoluto y el error relativo.} \\ \text{Error\_absoluto} &= |0.3 \times 10^{-3} - 0.31 \times 10^{-3}| = 0.00001 \\ \text{Error\_relativo} &= \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{0.00001}{0.0003} = 3.33 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

Ejemplo 3:

$$\begin{aligned} p &= 0.3 \times 10^4 \\ p^* &= 0.31 \times 10^4 \\ \text{Calcular el error absoluto y el error relativo.} \\ \text{Error\_absoluto} &= |0.3 \times 10^4 - 0.31 \times 10^4| = 100 \\ \text{Error\_relativo} &= \frac{|0.3 \times 10^4 - 0.31 \times 10^4|}{|0.3 \times 10^4|} = \frac{100}{0.3 \times 10^4} = \frac{100}{3000} = 3.33 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

Conclusión:

Como una medida de precisión el error absoluto puede ser engañoso y el error relativo es más significativo.

[Regreso a la página principal](#)



## 1.2.1 Error relativo aproximado

Definiciones

Error relativo aproximado = ERA = (( Valor actual - Valor anterior )/ Valor actual)\*100%

Tolerancia =  $(0.5 \times 10^{2-n})\%$

Donde n= número de cifras significativas

El término de convergencia es la desigualdad : ERA < Tolerancia

Ejemplo 1:

Usando la serie de Taylor con  $x_0=0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!}$$

encontrar  $e^{1.5}$  con tres cifras significativas. Se desea saber también: ¿En cuántas iteraciones se cumple el término de convergencia?

Solución:

Como n = 3, entonces:

Tolerancia =  $(0.5 \times 10^{2-3})\% = 0.05\%$

Término de convergencia : ERA < Tolerancia

ERA = (( Valor actual - Valor anterior )/ Valor actual)100%

$$f(x) = e^x = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(0)x}{1!} + \frac{f^{(2)}(0)x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

$$f(x) = e^0 + e^0 x + \frac{e^0 x^2}{2!} + \frac{e^0 x^3}{3!} + \dots$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

Para  $x = 1.5$

iteración(i = 1)

$$e^{1.5} = 1.0$$

iteración(i = 2)

$$e^{1.5} = 1.0 + 1.5 = 2.5$$

$$|ERA| = \left( \frac{2.5 - 1}{2.5} \right) * 100 = (0.6) * 100 = 60\%$$

$$\text{Iteración}(i = 3) \Rightarrow e^{1.5} = 2.5 + \frac{x^2}{2!} = 2.5 + \frac{(1.5)^2}{2} = 3.625$$

$$|E_{\text{relativo\_aproximado}}| = \left( \frac{3.625 - 2.5}{3.625} \right) * 100 = 31.03\% > 0.05\%$$

$$\text{Iteración}(i = 4) \Rightarrow e^{1.5} = 3.625 + \frac{x^3}{3!} = 3.625 + \frac{(1.5)^3}{6} = 4.1875$$

$$|E_{\text{relativo\_aproximado}}| = \left( \frac{4.1875 - 3.625}{4.1875} \right) * 100 = 13.43\% > 0.05\%$$

$$\text{Iteración}(i = 5) \Rightarrow e^{1.5} = 4.1875 + \frac{x^4}{4!} = 4.1875 + \frac{(1.5)^4}{24} = 4.3984375$$

$$|E_{\text{relativo\_aproximado}}| = \left( \frac{4.3984375 - 4.1875}{4.3984375} \right) * 100 = 4.79\% > 0.05\%$$

$$\text{Iteración}(i = 6) \Rightarrow e^{1.5} = 4.3984375 + \frac{x^5}{5!} = 4.3984 + \frac{(1.5)^5}{120} = 4.46171875$$

$$|E_{\text{relativo\_aproximado}}| = \left( \frac{4.46171875 - 4.3984375}{4.46171875} \right) * 100 = 1.41\% > 0.05\%$$

$$\text{Iteración}(i = 7) \Rightarrow e^{1.5} = 4.46171875 + \frac{x^6}{6!} = 4.4775390625$$

$$|E_{\text{relativo\_aproximado}}| = \left( \frac{4.4775390625 - 4.46171875}{4.4775390625} \right) * 100 = 0.35\% > 0.05\%$$

$$\text{Iteración}(i = 8) \Rightarrow e^{1.5} = 4.47753906 + \frac{x^7}{7!} = 4.48092912946$$

$$|E_{\text{relativo\_aproximado}}| = \left( \frac{4.4809291294 - 4.47753906}{4.48092912946} \right) * 100 = 0.07\% > 0.05\%$$

$$\text{Iteración}(i = 9) \Rightarrow e^{1.5} = 4.48092912946 + \frac{x^8}{8!} = 4.4815647602$$

$$|E_{\text{relativo\_aproximado}}| = \left( \frac{4.4815647602 - 4.48092912946}{4.4815647602} \right) * 100 = 0.014\% < 0.05\%$$

Aquí mi ERA < Tolerancia

$\therefore e^{1.5} = 4.48$  (con tres cifras significativas y 9 iteraciones).

Ejercicio 2 :

Encontrar  $\cos(\Pi / 6)$  con  $n = 2$  (2 cifras significativas), donde  $\Pi = 180^\circ = 3.1416$  radianes

Usando la serie de Taylor:



$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}$$

Solución :

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = \cos(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(0) = -\sin(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -\cos(0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin x \Rightarrow f'''(0) = \sin(0) = 0$$

$$f^{iv}(x) = \cos x \Rightarrow f^{iv}(0) = \cos(0) = 1$$

$$f(x) = \cos x = \frac{f^0(0)}{0!} + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \frac{f^{iv}(0)x^4}{4!} + \dots$$

$$f(x) = \cos x = \frac{\cos(0)}{0!} + \frac{-\sin(0)x}{1!} + \frac{-\cos(0)x^2}{2!} + \frac{\sin(0)x^3}{3!} + \frac{\cos(0)x^4}{4!} \dots$$

$$f(x) = \cos x = 1 + 0 - \frac{1x^2}{2!} + 0 + - + + - \dots = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - + \dots$$

$$\text{Tolerancia} = (0.5 \times 10^{2-2})\% = 0.5\%$$

Por lo tanto, necesitamos un error relativo aproximado menor a 0.5% trabajando en radianes.

Para i=1

$$\cos \pi / 6 = 1$$

i=2

$$\cos \pi / 6 = 1 - (\pi / 6)^2 / 2! = 0.86292152$$

$$|\text{Error\_Relativo\_Aproximado}| = \left| \left( \frac{0.86292152 - 1}{0.86292152} \right) * 100 \right| = 15.88\%$$

i = 3

$$\cos \frac{\pi}{6} = 0.86292152 + \frac{(\pi/6)^4}{4!} = 0.86605327161$$

$$|\text{Error\_Relativo\_Aproximado}| = \left| \left( \frac{0.86605327161 - 0.86292152}{0.86605327161} \right) * 100 \right| = 3.6161 \times 10^{-3}\%$$

$$|\text{Error\_Relativo\_Aproximado}| < \text{Tolerancia}$$

$$\therefore \cos \frac{\pi}{6} = 0.866053271613 \Rightarrow 0.86(2 \text{ _cifras _significativas})$$

Se muestra a continuación el diagrama de flujo del algoritmo de solución de este ejercicio:

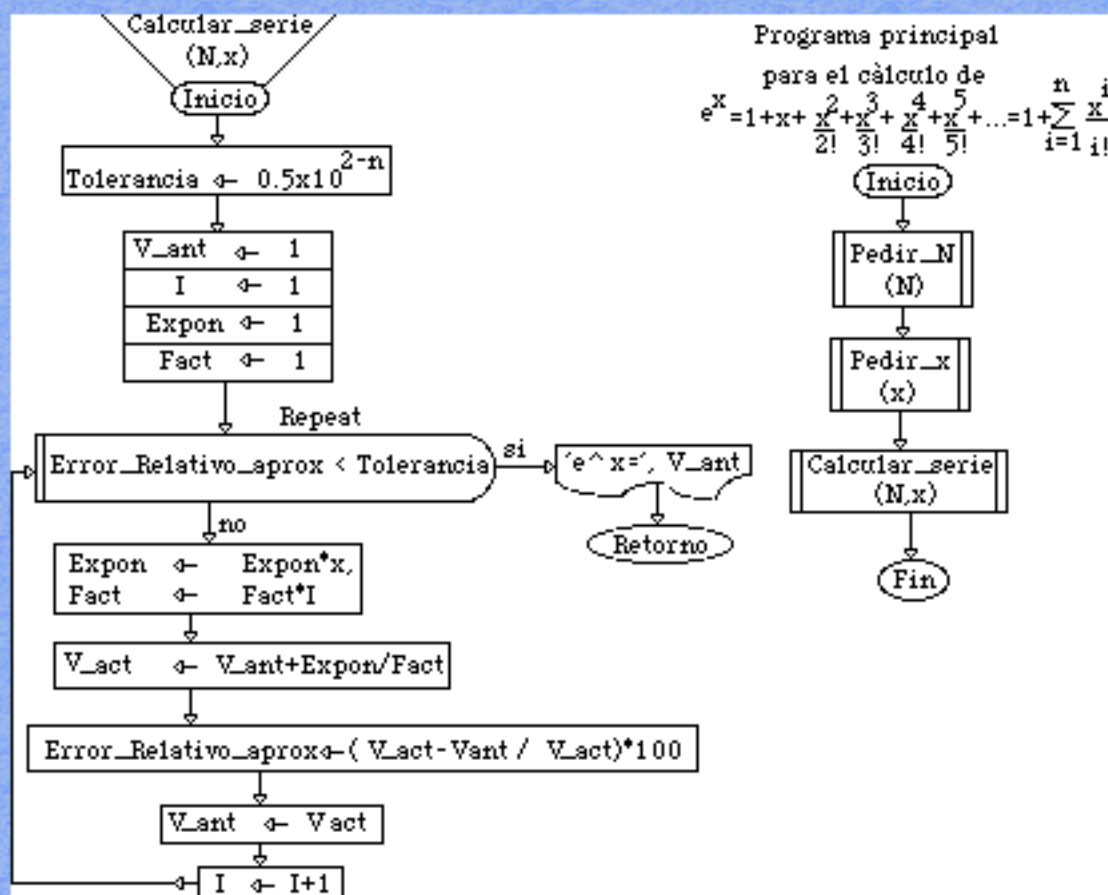


Figura 1.1.- Diagrama de flujo del Error relativo aproximado para  $e^x$

[Regreso a la página principal](#)

## 1.3 Error de redondeo y aritmético de computadora

El error de redondeo se origina porque una máquina involucra números con sólo un número finito de dígitos; por lo tanto, los cálculos se realizan con representaciones aproximadas de los números verdaderos. Dicho de otra manera, el error de redondeo se debe a la naturaleza discreta del sistema numérico de máquina de punto flotante, el cual a su vez se debe a su longitud de palabra finita. Cada número (real) se reemplaza por el número de máquina más cercano. Esto significa que todos los números en un intervalo local están representados por un solo número en el sistema numérico de punto flotante.

En una computadora se almacena una parte fraccionaria llamada la mantisa junto con una parte exponencial llamada característica; además de un espacio para el signo.



Ejemplo en la IBM 370:

1 dígito binario (bit) indica el signo.

7 dígitos binarios (7 bits) indican el exponente en base 16.

24 dígitos binarios (24 bits) indican la mantisa.

El exponente de 7 bits da un rango de 0 a 127.

$$1*2^6 + 1*2^5 + 1*2^4 + 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 = 127$$

$$0*2^6 + 0*2^5 + 0*2^4 + 0*2^3 + 0*2^2 + 0*2^1 + 0*2^0 = 0$$

Sin embargo, debido a los exponentes usados, el rango es de -64 a 63, o sea que, se resta automáticamente 64 del exponente listado.

$$127-64=63$$

$$0-64=-64$$

Ejemplo:

Signo	Exponente o Caracte- rística				Mantisa		
0	1000010	1011	0011	0000	01 <u>0</u> 0	0000	0000
Número positivo	66 Decimal				Bit No.- 14		

∴ Este número de máquina, representa al número decimal:

$$+[0.699279785156]16^{66-64}=179.015625$$

donde  $16^{66-64}$  es igual a 256.

Y el siguiente número de máquina más pequeño.

+	66				Bit No.- 14		
0	1000010	1011	0011	0000	0 <u>0</u> 11	1111	1111

179.0156097412109375

Número de máquina original

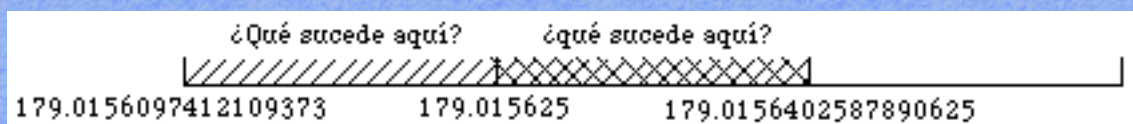
+	66				Bit No.-14		
0	1000010	1011	0011	0000	0100	0000	0000

179.015625

Siguiente número de máquina más grande

+	66				Bit No.-14		
0	1000010	1011	0011	0000	0100	0000	0001

179.0156402587890625



Por tanto nuestro número original de la máquina no sólo representa a 179.015625 sino también muchos números reales que se hallen entre este número y sus números más cercanos. Si queremos ser más precisos, decimos que con el número original de máquina se representa cualquier número real en el intervalo del número más chico y el número más grande.

Para asegurar la unicidad de la representación y obtener toda la precisión disponible se requiere que por lo menos uno de los cuatro bits más a la izquierda de la mantisa de un número de máquina sea un uno.

$$1 \times (1/2)^1 \leftrightarrow 0.50000$$

$$1 \times (1/2)^2 \leftrightarrow 0.25000$$

$$1 \times (1/2)^3 \leftrightarrow 0.12500$$

$$1 \times (1/2)^4 \leftrightarrow 0.06250$$

Este requisito implica que el número de máquina más pequeño que pueda representarse es:

0	0000000	0001 000000000000000000000000
+		$(1/2)^4$

$$+\left(\frac{1}{2}\right)^4 16^{0-64} = +\frac{1}{16} * 16^{-64} = +16^{-65} \approx 5.39760534693\text{E} - 79$$





$$\text{fl}(\Pi) = 0.31416 \times 10^1$$

$$\Pi = 3.1416$$

[Regreso a la página principal](#)

## 1.4 Error de truncamiento

Este tipo de error ocurre cuando un proceso que requiere un número infinito de pasos se detiene en un número finito de pasos.

Generalmente se refiere al error involucrado al usar sumas finitas o truncadas para aproximar la suma de una serie infinita. Note que el error de truncamiento, a diferencia del error de redondeo, no depende directamente del sistema numérico que se emplee.

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Que es el polinomio de Taylor de grado  $n$  para la función  $f$  alrededor de  $x_0$ .

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Que es el residuo o error de truncamiento asociado con  $P_n$ .

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

En el caso específico de que  $x_0 = 0$  el polinomio de Taylor se conoce como el polinomio de Maclaurin y la serie de Taylor se conoce como la serie de Maclaurin.

Ejemplo 1:

Determine el polinomio de Taylor de segundo grado y también el de tercer grado para  $f(x) = \cos(x)$  respecto a  $x_0 = 0$  y use este polinomio para aproximar  $\cos(0.01)$

Solución:

Polinomio de Taylor de segundo orden.



$$P_2(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$P_2(x) = \frac{f^0(x_0)}{0!} (x - x_0)^0 + \frac{f^1(x_0)}{1!} (x - x_0)^1 + \frac{f^2(x_0)}{2!} (x - x_0)^2$$

$$\text{con } x_0 = 0$$

$$P_2(x) = f^0(0) + \frac{f^1(0)}{1!} x + \frac{f^2(0)}{2!} x^2$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

$$f''(x) = \frac{d(-\sin x)}{dx} = -\cos x$$

$$f'''(x) = \frac{d(-\cos x)}{dx} = \sin x$$

$$\text{con } x = 0.01$$

Calculando derivadas:

$$P_2(x) = \cos(0) + (-\sin(0))x - \frac{\cos(0)}{2} x^2$$

$$P_2(x) = 1 - x(0) - \frac{1}{2} x^2 (1)$$

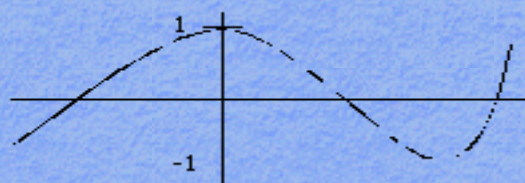
$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2$$

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi(x))}{3!} (x - 0)^3$$

$$R_2(x) = \frac{\sin(\xi(x))}{6} x^3$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{x^3}{6} \sin(\xi(x))$$



$\xi(x)$  es un número entre 0 y x, por ejemplo, cuando  $x=0.01$ ,  $0 \leq \xi(x) \leq 0.01$  y  $x_0 \leq \xi(x) \leq x$ .

$$\begin{aligned}\cos(0.01) &= 1 - \frac{1}{2}(0.01)^2 + \frac{\sin(\xi(x))}{6}(0.01)^3 \\ \cos(0.01) &= 0.99995 + 0.16 \times 10^{-6} \sin(\xi(x)) \\ \cos(0.01) - 0.99995 &= 0.16 \times 10^{-6} \sin(\xi(x)) \\ |\cos(0.01) - 0.99995| &= |0.16 \times 10^{-6} \sin(\xi(x))| \\ |\cos(0.01) - 0.99995| &= 0.16 \times 10^{-6} |\sin(\xi(x))|\end{aligned}$$

donde  $|\sin(\xi(x))|$  a lo más es 1 por lo que

$$|\cos(0.01) - 0.99995| \leq 0.16 \times 10^{-6} \text{ Error\_de\_Truncamiento}$$

b) con  $n = 3$  y  $x_0 = 0$ ;  $f(x) = \cos(0.01)$

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k$$

$$P_3(x) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} (x-0)^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} (x-0)^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} (x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} (x-0)^3$$

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f(x_0 = 0) = \cos(0)$$

$$f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(x_0 = 0) = -\sin(0)$$

$$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(x_0 = 0) = -\cos(0)$$

$$f'''(x) = \sin x \Rightarrow f'''(x_0 = 0) = \sin(0)$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(4)}(x_0 = 0) = \cos(0)$$

$$P_3(x) = \cos(0) + (-\sin(0))x + \frac{(-\cos(0))x^2}{2} + \frac{\sin(0)x^3}{6}$$

$$P_3(x) = 1 - 0 - \frac{(1)x^2}{2} + 0 = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$P_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \text{ Polinomio\_de\_Maclaurin}$$

Calculando el residuo:

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} (x-0)^4 \Rightarrow R_3(x) = \frac{\cos(\xi(x))}{24} x^4 = \text{Residuo}$$



$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = P_3(x) + R_3(x)$$

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \cos(\xi(x))$$

$$(\text{para } x = 0.01)$$

$$\cos(0.01) = 1 - \frac{(0.01)^2}{2} + \frac{(0.01)^4}{24} \cos(\xi(x))$$

$$\cos(0.01) = 0.99995 + 4.16 \times 10^{-10} \cos(\xi(x))$$

$$\cos(0.01) - 0.99995 = 4.16 \times 10^{-10} \cos(\xi(x))$$

$$|\cos(0.01) - 0.99995| = |4.16 \times 10^{-10} \cos(\xi(x))|$$

$$|\cos(0.01) - 0.99995| = 4.16 \times 10^{-10} |\cos(\xi(x))|$$

donde  $|\cos(\xi(x))|$  a lo más es 1 por lo que

$$|\cos(0.01) - 0.99995| \leq 4.16 \times 10^{-10} \text{Error\_de\_Truncamiento}$$

Conclusión:

Las dos primeras partes del ejemplo ilustran los 2 objetivos de los métodos numéricos. El primero es obtener una aproximación que los polinomios de Taylor ofrecen en ambas partes.

El segundo objetivo consiste en determinar la exactitud de la aproximación (error de truncamiento). En este caso el polinomio de tercer grado proporciona una exactitud mayor o un error de truncamiento menor.

Ejemplo 2:

Sea  $f(x) = x^3$

a) Encontrar el polinomio de Taylor de segundo grado para  $x_0 = 0$  y el error de truncamiento para cuando  $x = 0.5$ .

Solución:

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k$$

$$P_2(x) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2$$

$$f^{(0)}(x) = x^3$$

$$f^{(0)}(0) = x^3 = 0^3 = 0$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{dx^3}{dx} = 3x^2 \Rightarrow f^{(1)}(0) = 3(0)^2 = 0$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{d3x^2}{dx} = 6x \Rightarrow f^{(2)}(0) = 6(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{d6x}{dx} = 6$$

$$P_2(x) = 0 + 0(x) + 0(x^2)$$

$$P_2(x) = 0$$

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!} (x-0)^3$$

Nota:  $\xi(x)$  en el # que no conozco

$$R_2(x) = \frac{6}{6} x^3$$

$$R_2(x) = x^3$$

$$\text{con } x = 0.5$$

$$R_2(x) = (0.5)^3$$

$$R_2(x) = 0.125 (\text{Residuo})$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = P_2(x) + R_2(x)$$

$$f(x) = x^3 = 0 + 0.125$$

$$x^3 = 0.125$$

$$|x^3 - 0| \leq 0.125$$

Para comprobar

$$\text{si } \Rightarrow x = 0.5 \therefore x^3 = 0.125 = 0.125$$

$$\therefore |x^3 - 0| \leq 0.125 \text{ Es el error de truncamiento}$$

Ejemplo 3:

Calcular  $f(x) = x^3$  para un polinomio de Taylor de segundo grado con  $x_0=1$ .



$$P_2(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$P_2(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} (x - x_0)^0 + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} (x - x_0)^1 + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} (x - x_0)^2$$

$$\text{con } x_0 = 1$$

$$P_2(x) = \frac{f^{(0)}(1)}{1} (1) + f^{(1)}(1)(x - 1)^1 + \frac{f^{(2)}(1)}{2} (x - 1)^2$$

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)}{2} (x - 1)^2$$

$$P_2(x) = 1 + 3(x - 1) + 3(x - 1)^2$$

$$\text{si } f(x) = x^3 \Rightarrow f(1) = 1; f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(1) = 3; f''(x) = 6x \Rightarrow f''(1) = 6; f'''(x) = 6$$

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{4!} (x - x_0)^3 \mapsto \text{con}(x_0 = 1)$$

$$R_2(x) = \frac{6}{24} (x - x_0) = \frac{1}{4} (x - 1)$$

$$\text{cuando } (x = 0.5)$$

$$R_2(x) = 0.25(0.5 - 1) = -0.125$$

$$R_2(x) = -0.125 \text{ _ Error _ de _ Truncamiento}$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$f(x) = x^3 = 1 + 3(x - 1) + 3(x - 1)^2 - 0.125$$

$$(0.5)^3 = 1 + 3(0.5 - 1) + 3(0.5 - 1)^2 - 0.125$$

$$= 0.125$$

$$|x^3 - 0.75| \leq -0.125$$

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{4!} (x - x_0)^3 \rightarrow \text{con}(x_0 = 1)$$

$$R_2(x) = \frac{6}{24} (x - x_0) = \frac{1}{4} (x - 1)$$

$$\text{cuando } (x = 0.5)$$

$$R_2(x) = 0.25(0.5 - 1) = -0.125$$

$$R_2(x) = -0.125 (\text{Residuo})$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = P_2(x) + R_2(x)$$

$$f(x) = x^3 = 1 + 3(x - 1) + 3(x - 1)^2 - 0.125$$

$$\text{cuando } (x = 0.5)$$

$$x^3 = 1 + 3(0.5 - 1) + 3(0.5 - 1)^2 - 0.125$$

$$x^3 = 0.125$$

$$|x^3| \leq 0.125$$

Es el Error de Truncamiento

[Regreso a la página principal](#)



## 2.0 Matrices y Ecuaciones Lineales Simultáneas

### 2.1 Determinantes y Matrices

A continuación se presenta la nomenclatura del determinante de una matriz cuya contracción es "detA" y la nomenclatura general de una matriz.

a) Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

b) Matriz

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

#### 2.1.1 Cálculo del determinante de A

La fórmula a utilizar para obtener el determinante de una matriz de 2x2 es:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Extendiéndose para un caso general como  $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$  con  $j=1,2,\dots,n$ . Donde:

$A_{ij}$  es llamado Cofactor  $= (-1)^{i+j} M_{ij}$

$M_{ij}$  = Menor

$M_{ij}$  es el determinante que resulta de eliminar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna.

Ejemplo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 6 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad \dots\dots\dots(1)$$

para cada  $j=1,2,\dots,n$

Para las filas  $i$  y columnas  $j = 1,2,3,\dots,n$

$$\det A = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + a_{3j} A_{3j}$$

Ahora para la fila  $i$  la columna  $j = 1$

$$\det A = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}$$

Ahora para la fila  $i$  la columna  $j = 2$

$$a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32}$$

Ahora para la fila  $i$  la columna  $j = 3$

$$a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33}$$

para las filas  $i$  y las columnas  $j=1,2,3,\dots,n$

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad \text{para cada } i=1,2,\dots,n$$

$$\det A = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

para la fila  $i=1$  y las columnas  $j=1,2,3,\dots,n$

$$\det A = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

para la fila  $i=2$  y las columnas  $j=1,2,3,\dots,n$

$$a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23}$$

para la fila  $i=3$  y las columnas  $j=1,2,3,\dots,n$



$$a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

Tomando como ejemplo la matriz (1) se calculará para fila  $i = 1$  :

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$\det A = 4(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 4 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 4(-15 - (-3)) - (0 - 18) - 2(0 - 30)$$

$$\det A = 4*(-12) + 18 + 60$$

$$\det A = -48 + 18 + 60 = 30$$

$$\det A = 30$$

de la matriz (1) se calculará para la fila  $i = 2$  :

$$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$\det A = 0 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 5*(-12 + 12) + (-1)^{2+2} + 3*(-1)^{2+3}*(-4 - 6)$$

$$\det A = -3*(-10)$$

$$\det A = 30$$

Con la matriz (1) se calculará ahora para la fila  $i = 3$  :

$$\det A = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

$$\det A = 6(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 6*(3 + 10) + 12 - 3*(20) = 78 + 12 - 60$$

$$\det A = 30$$

### 2.1.2 Propiedades de los determinantes

1) Si un renglón es múltiplo o igual que otro renglón, el determinante es cero (también se aplica a columnas).

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 14 & -4 \end{vmatrix} = -28 + 28 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

2) Si un renglón o columna consiste exclusivamente de ceros, el determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0 * A_{21} + 0 * A_{22} + 0 * A_{23} = 0$$

3) El determinante de una matriz diagonal, triangular superior e inferior se obtiene multiplicando los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 7A_{11} = 7(-5)(2) = -70$$

Diagonal

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1A_{11} = (1)(5)(2) = 10$$

Triangular Superior

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -7 & 3 \end{vmatrix} = -5A_{11} = (-5)(2)(7) = -30$$

Triangular Inferior

4) Si se intercambian renglones o columnas, el resultado cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R2} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$d=14-15=-1 \quad d=15-14=1$$

5) Si se multiplica por una constante un renglón o columna, el resultado también queda multiplicado por esa constante.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{R1 \rightarrow -3R1} \begin{vmatrix} -6 & -15 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$d=-1 \quad d=-42+45 = 3 = (-3)(-1)$$

6) Si se le suma a un renglón el múltiplo de otro (también se aplica a columnas) el determinante no se altera. Equivale a hacer cero un elemento.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{R2 \rightarrow (-3/2)R1 + R2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1/2 \end{vmatrix}$$

$$d=-1 \quad d=2*(-1/2)+0=-1$$

7) El determinante que resulta de la transpuesta es igual al de la matriz original .

$$|A^t| = |A|$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \dots \det A = 14 - 15 = -1$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \dots \det A^t = 14 - 15 = -1$$

8) Si  $C=A*B$  y  $|C| = |A| * |B|$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 24 \\ 24 & 34 \end{bmatrix} \dots \det C = 578 - 576 = 2$$

$$\det A = -1$$

$$\det B = 4 - 6 = -2$$

$$|A| * |B| = (-1) * (-2) = 2$$

$$\text{por lo tanto } |C| = |A| * |B|$$

$$2=2$$



## Aplicación de las propiedades

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

En lugar de resolver por cofactores que sería muy laborioso, usamos propiedades y convertimos en ceros varios elementos de alguna columna.

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} R2 \rightarrow (-4/5)R1 + R2 \\ R3 \rightarrow (-7/5)R1 + R3 \\ R4 \rightarrow (1/5)R1 + R4 \end{array}} \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4/5 & -7/5 & 17/5 \\ 0 & 17/5 & -26/5 & -4/5 \\ 0 & 14/5 & 23/5 & 7/5 \end{vmatrix}$$

No se alteró el determinante y podemos ahora resolver por cofactores en la columna 1.

$$d = 5 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41}$$

$$d = 5 (109.6) = 548$$

### 2.1.3 Cofactores

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad \text{para cada } i=1,2,\dots,n$$

[¡Cuidado!, solo para matrices de 3x3]

					j=1		j=3	
$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$	i=1	+	-	+	-
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{24}$	i=2	-	+	-	+
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$a_{34}$	i=3	+	-	+	-
$a_{41}$	$a_{42}$	$a_{43}$	$a_{44}$	i=4	-	+	-	+

Algoritmo de cofactores

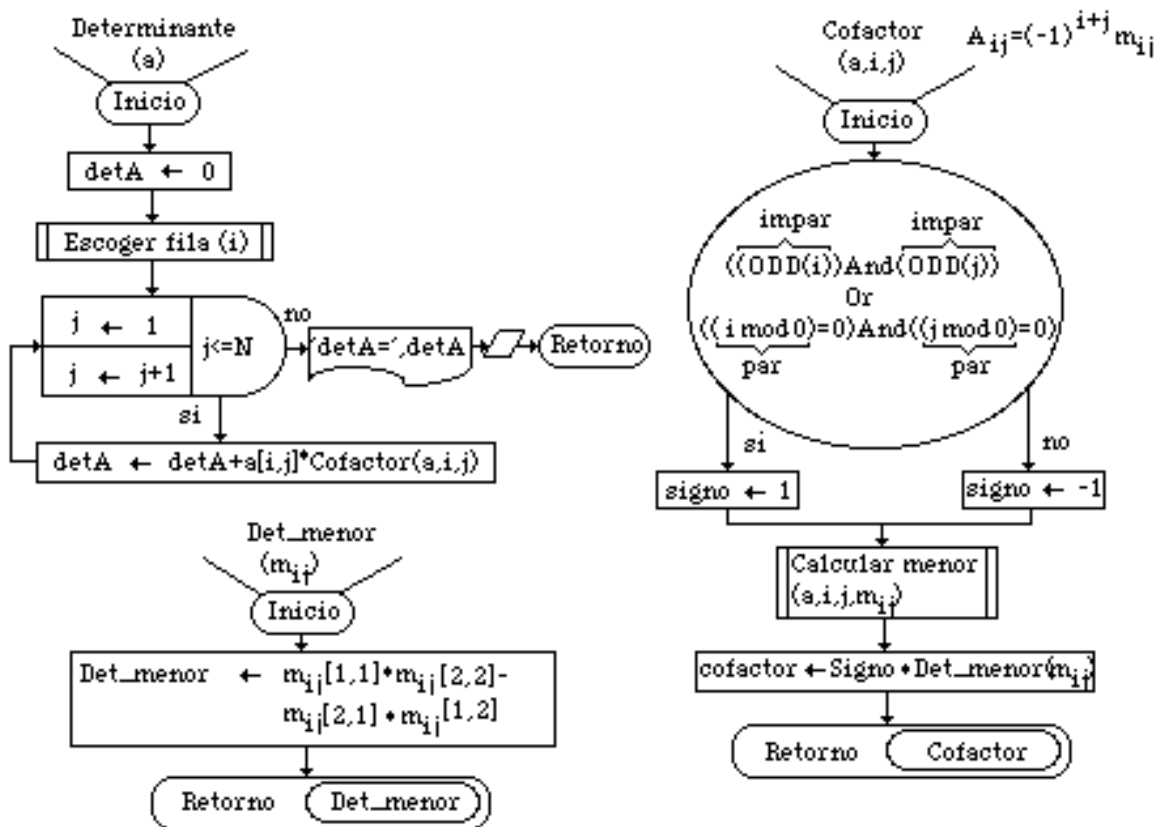


Figura 2.1 Diagrama de flujo del cálculo de cofactores.

A continuación se presenta el procedimiento en pseudocódigo que calcula el menor.

Procedure Calcula\_menor (a:matriz;i,j:Byte;var m<sub>ij</sub>;matriz2);

Var

Fil,Col,LFil,m : Byte;

Bandera : Boolean;

Begin

Lfil :=1;

Bandera :=False;

for Fil:=1 to 3 do

Begin

m:=1;

for Col:=1 to 3 do

If not (((Fil=i) or (Col=j))and(m<=3))

Then

Begin

Mij[LFil,m]:=a[Fil,Col];

Inc(m);

Bandera:=True

End;

If Bandera

Then

LFil:=2

End

End;

## 2.1.4 Matrices



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

$A_{n \times m}$ ...donde

$n$  = renglones

$m$  = columnas  $\Rightarrow$  matriz\_rectangular

Ejemplos\_de\_matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Matriz_Diagonal}$$

$A = (a_{ij} * \delta_{ij})$  donde  $\delta_{ij}$  = Delta\_de\_Kronecker\_teniendo  $a_{ij} \neq 0$  para  $i = j$

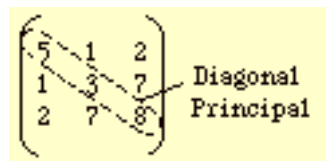
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Matriz_Nula_o_cero}$$

Una matriz cuadrada es cuando  $A_{n \times m}$  y  $n=m$  entonces  $A_{n \times n}$ .

En el caso de una matriz cuadrada, si se cumple que la transpuesta de una matriz es igual a la matriz original, entonces la matriz original es una matriz simétrica,  $A^t=A$  entonces  $A$  es simétrica.

Una matriz simétrica es aquella para la cual  $a_{ij}=a_{ji}$ .

Ejemplo:



### 2.1.4.1 Operaciones con matrices

1)  $KA = K * a_{ij}$  para todo  $ij$

Por ejemplo:  $k=3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \Rightarrow 3 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

2)  $C=A+B$  solo si tienen la misma dimensión

$$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

### 2.1.4.2 Multiplicación

$AB=C$  Solo se puede realizar la multiplicación si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B.

$$A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

para cada  $i=1,2,\dots,m$  y para cada  $j=1,2,\dots,p$ .

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

que \_tiene\_que\_dar\_una\_matriz(2x3)

$$C_{11} = 1 * 5 + 2 * 7 = 19$$

$$C_{12} = 1 * 6 + 2 * 8 = 22$$

$$C_{13} = 1 * 9 + 2 * 10 = 29$$

$$C_{21} = 3 * 5 + 4 * 7 = 43$$

$$C_{22} = 3 * 6 + 4 * 8 = 50$$

$$C_{23} = 3 * 9 + 4 * 10 = 67$$

$$C = \begin{pmatrix} 19 & 22 & 29 \\ 43 & 50 & 67 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

### Pseudódigo de la multiplicación de matrices

La matriz A es una matriz de (mxn) y una matriz B que es una matriz de (nxp).

```
Procedure Multiplica_mat(A,B:matriz;var C:matriz );
```

```
{ Se calcula el producto AB donde A es un matriz m por n y B una matriz n por p
```

```
m,n,p son Integer y son variables globales }
```

```
Var
```

```
    K, i,j:integer;
```

```
Begin
```

```
    For i:=1 to m do
```

```
        For j:=1 to p do
```

```
            Begin
```

```
                C[i,j]:=0;
```

```
                For k:=1 to n do
```

```
                    C[i,j]:= C[i,j]+A[i,k]*B[k,j]
```

```
            End
```

```
End;
```

### 2.1.4.3 Matriz inversa

Se dice que una matriz  $A$  de  $n \times n$  es no-singular si existe una matriz  $A^{-1}$  de  $n \times n$  tal que  $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ . La matriz  $A^{-1}$  se llama la inversa de  $A$ . Una matriz que no tiene inversa se llama singular.

$A^{-1} = C^t / |A|$  si  $|A| \neq 0$  no tiene inversa, y por lo tanto  $A$  es una matriz singular.

$C^t$  = Matriz transpuesta de cofactores de  $A$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ Calcular la } A^{-1}$$



$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (1)(2) - 2(4) - 1(2 + 1) = 2 - 8 - 3$$

$$|A| = -9$$

$\therefore A$  tiene inversa

Para comprobar se obtiene el determinante por las propiedades de los determinantes.

Matriz de cofactores

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{R3} \rightarrow \text{R1} + \text{R2}]{\text{R2} \rightarrow -2\text{R1} + \text{R2}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1A_{11} + 0A_{21} + 0A_{31}$$

$$= 1(-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 6 = -9$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2 - 0) = 2$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-1) = 3$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 1) = -5$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (2 - 1) = 1$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 2) = -3$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -5 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$C^t = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

#### 2.1.4.4 Propiedades de la matriz inversa

- 1)  $A^{-1}$  existe solo sí  $|A|$  diferente de 0
- 2)  $A^{-1}$  es única
- 3) Si  $A^{-1}$  existe, entonces  $|A^{-1}| = |A|^{-1} = 1 / |A|$
- 4)  $(A^{-1})^{-1} = A$

$$5) (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

$$6) (AB)^{-1} = (B)^{-1}(A)^{-1}$$

$$7) (A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$$

## 2.2 Solución de ecuaciones Lineales Simultáneas

### 2.2.1 Solución de un SEL usando la inversa

Se tiene un SEL general :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.

.

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Esto se puede expresar en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A_{n \times n} x_{n \times 1} = b_{n \times 1}$$

donde

$a_{ij}$  = Coeficientes \_de \_las \_variables

$b_n$  = Cons tan tes

$x_i$  = Incognitas

Se despeja el vector x de la igualdad anterior.

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$I_{n \times n} x_{n \times 1} = A^{-1} b_{n \times 1}$$

$$x_{n \times 1} = A^{-1} b_{n \times 1}$$

Este último despeje nos permite darle solución a un SEL usando la inversa



Ejemplo :

$$x_1 + x_2 = 6$$

$$5x_1 - 4x_2 = 12$$

Calcular el SEL usando  $A^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}; \det A = -4 - 5 = -9; A^{-1} = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} -36 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x_1 = 4$$

$$x_2 = 2$$

(4,2) Conjunto solución

Programa principal del Algoritmo para la solución de un SEL por la inversa

Tomando como base que ya se tiene el algoritmo de la inversa

Begin

Captura (A,b);

CalculaInversa(A\_1);

MultiplicaMatVec(A\_1,b,x);

Imprime(x)

End.

## 2.2.2 Solución de un SEL por el Método gráfico

Ejemplo de Solución única :

$$x_1 + x_2 = 6 \quad (1)$$

$$5x_1 - 4x_2 = 12 \quad (2)$$

Despejando  $x_1$  de (1) y de (2)

$$x_1 = 6 - x_2$$

$$x_2 = (5x_1 - 12)/4$$

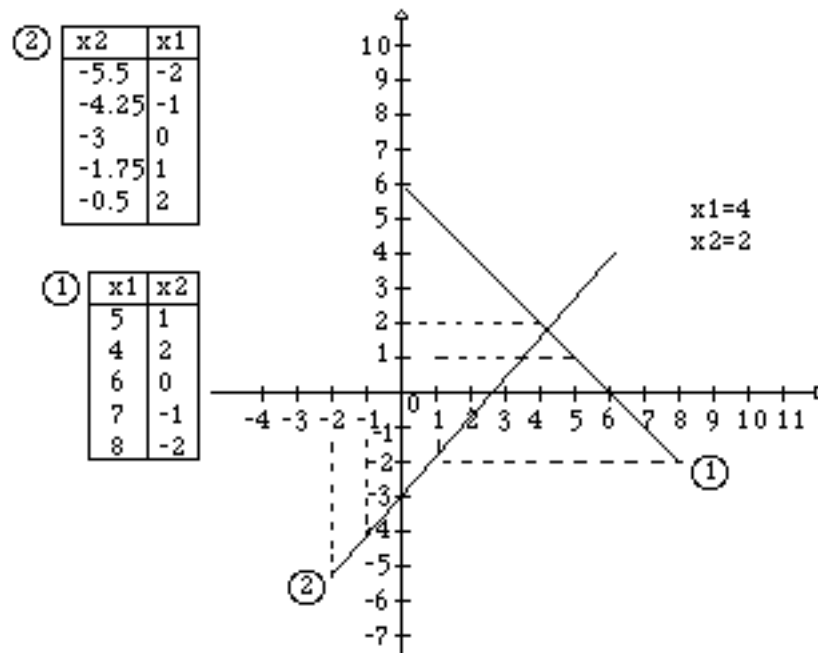


Figura 2.2.- Ejemplo 1 del método gráfico.

Ejemplo de Solución única

$$x - y = 7$$

$$x + y = 5$$

Se despeja y de (1) y (2)

$$y = -7 + x \quad (3)$$

$$y=5-x \quad (4)$$

Y dándole valores a x:

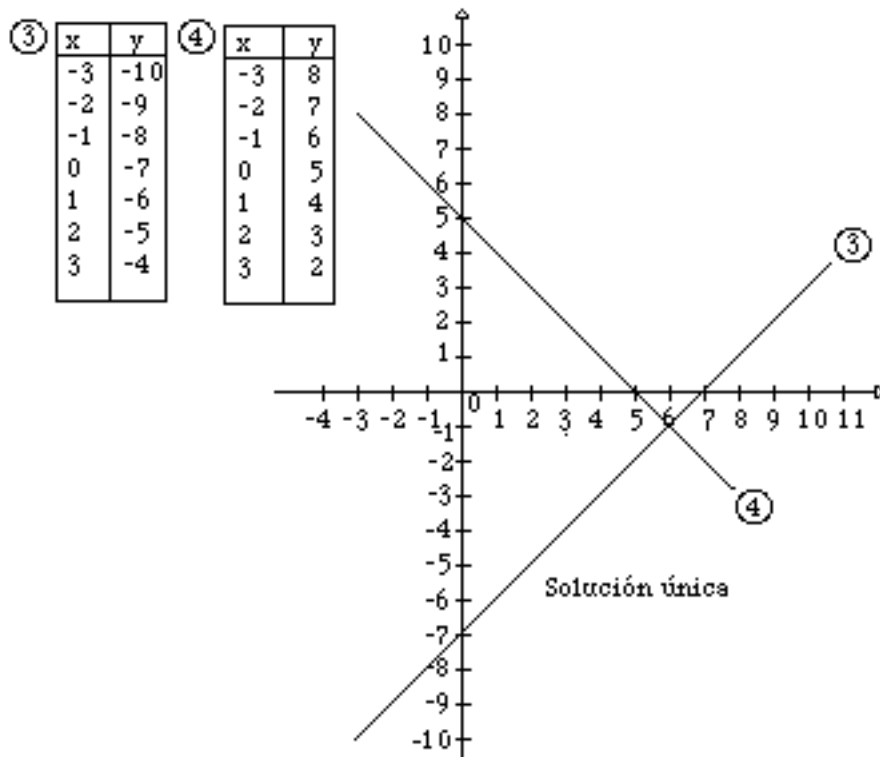


Figura 2.3.- Ejercicio 1 del método gráfico

Ejemplo de Sin Solución

$$x+y=2$$

$$x+y=1$$

$$\therefore y=2-x \quad (5)$$

$$y=1-x \quad (6)$$

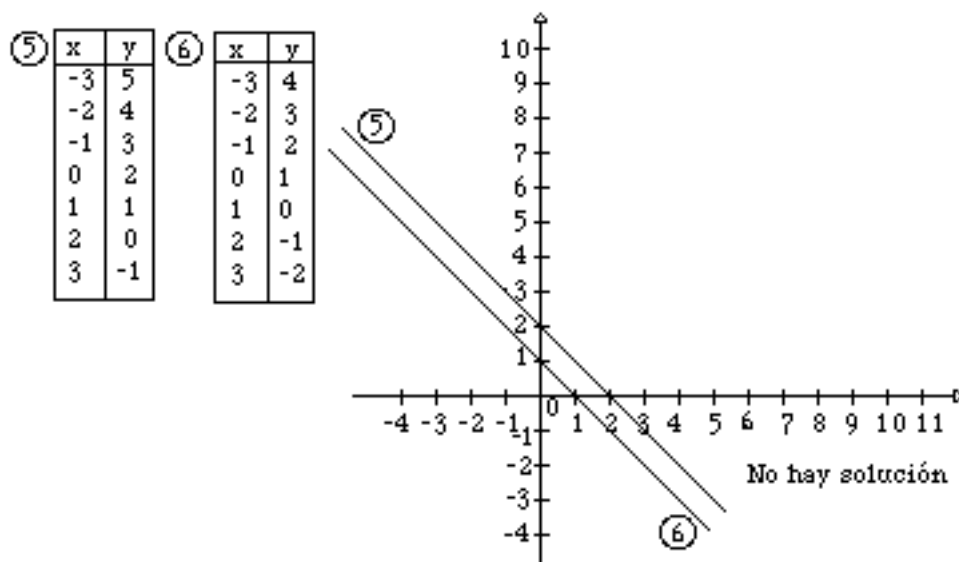


Figura 2.4.- Ejercicio 2 del método gráfico

Ejemplo de Solución infinita

$$2x+2y=4 \quad (7)$$

$$x+y=2 \quad (8)$$

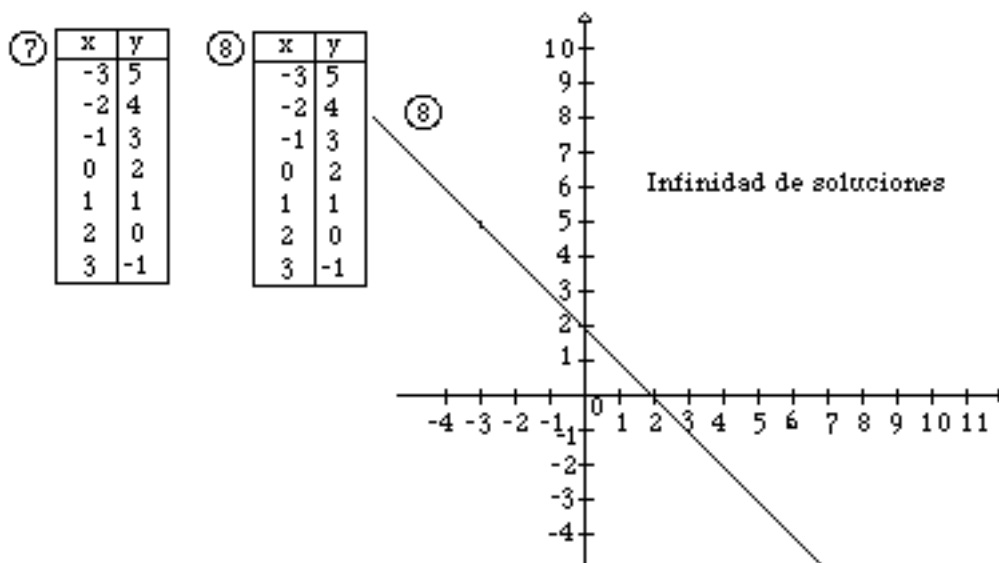


Figura 2.5.- Ejercicio 3 del método gráfico

### 2.2.3 Solución de un SEL por el Método de Kramer



$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

El sistema tiene solución solo si  $|A|$  es diferente de 0.

Ejercicio:

Resolver por el método de Kramer:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -5$$

$$3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 10$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 5 \\ 10 & 4 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-69}{-23} = 3; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-46}{-23} = 2$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{23}{-23} = -1; \therefore x_1 = 3; x_2 = 2; x_3 = -1$$

Conjunto solución: (3,2,-1)

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales de nxn(cuadrados).

$$x_1 = dx_1/d; x_2 = dx_2/d; x_3 = dx_3/d; \text{ etc.}$$

$$3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 25$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 9$$

$$4x_1 + 7x_2 + x_3 = 11$$

$$d = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 40 + 28 + 16 + 5 - 42 = -36$$

$$dx_1 = \begin{vmatrix} 25 & -5 & 4 \\ 9 & -1 & 2 \\ 11 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -25 - 110 + 252 + 44 + 45 - 350 = -144$$

$$dx_2 = \begin{vmatrix} 3 & 25 & 4 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 27 + 200 + 44 - 144 - 25 - 66 = 36$$

$$dx_3 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 25 \\ 1 & -1 & 9 \\ 4 & 7 & 11 \end{vmatrix} = -33 - 180 + 175 + 100 + 55 - 189 = -72$$

$$x_1 = \frac{dx_1}{d} = \frac{-144}{-36} = 4; x_2 = \frac{dx_2}{d} = \frac{36}{-36} = -1; x_3 = \frac{dx_3}{d} = \frac{-72}{-36} = 2$$

$\therefore (4, -1, 2)$  Es el conjunto de soluciones.

[Regreso a la página principal](#)

## 2.2 ELIMINACION GAUSSIANA SIMPLE

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= c_n \end{aligned}$$

El método consiste en pasar este sistema de ecuaciones, a uno que pueda ser representado por una matriz triangular superior.

$$a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n = c_1$$

$$a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = c_2$$

.

.

$$a'_{nn}x_n = c_n$$

De la última ecuación ya se puede despejar  $x_n$ , para obtener un valor;  $x_n$  se substituye en la ecuación anterior para obtener el valor de  $x_{n-1}$ ; así se va substituyendo hacia atrás hasta obtener el valor de todas las  $x$ 's.

Ejercicio:

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \quad (1)$$

$$2x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -9 \quad (2)$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \quad (3)$$

Solución:

1o.- Dividir la (1) entre el coeficiente de  $x_1$ , para tener como coeficiente de  $x_1$  un uno. En este caso ya se tiene.

2o.- Eliminar  $x_1$  de las ecuaciones (2) y (3), para ello, multiplicar la (1) por -2 y sumarla a la (2) y multiplicar la (1) por -3 y sumarla a la (3).

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \quad (1)$$

$$-3x_2 - 5x_3 = -21 \quad (2)$$

$$-14x_2 + 4x_3 = -16 \quad (3)$$

3o.- Normalizar la ecuación (2), dividiendo entre el coeficiente de  $x_2$ .

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \quad (1)$$

$$x_2 - (5/3)x_3 = 7 \quad (2)$$

$$-14x_2 + 4x_3 = -16 \quad (3)$$

4o.- Eliminar  $x_2$  de la ecuación (3), para ello multiplicar (2) por 14 y sumarla a (3).

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \quad (1)$$

$$x_2 - (5/3)x_3 = 7 \quad (2)$$

$$(82/3)x_3 = 82 \quad (3)$$

$$x_3 = 3$$

$$x_2 + (5/3)*(3) = 7$$

$$x_2 = 2$$

$$x_1 + 4(2) - 3 = 6$$

$$x_1 = 1$$

Ejemplo :

Resolver el SEL por Gauss

$$2x_1 + 5x_2 = -24$$

$$8x_1 - 3x_2 = 19$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -24 \\ 8 & -3 & 19 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{-8}{2}R_1 + R_2} \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -24 \\ 0 & -23 & 115 \end{array} \right)$$

$$2x_1 + 5x_2 = -24$$

$$-23x_2 = 115 \Rightarrow x_2 = \frac{115}{-23} = -5$$

$$x_1 = \frac{-24 - 5x_2}{2} = \frac{-24 - 5(-5)}{2} = \frac{1}{2}$$

En forma matemática, el método de eliminación Gaussiana consiste en :

Paso 1) Se obtiene la matriz triangular superior con la siguiente ecuación:

$$a(i, j) = (a_{i, j}) - \frac{a(i, k)a(k, j)}{a(k, k)} \quad \text{donde}$$

$k$ =fila pivote

$i$ =fila

$j$ =columna

$k=1, 2, 3, \dots, n-1$

$i=k+1, k+2, \dots, n$



$j=k, k+1, k+2, \dots, n+1$

Paso 2) Se despejan hacia atrás las ecuaciones, dejando los resultados en el vector  $x(i)$ , esto último no es necesario, puede quedar el resultado en la matriz aumentada.

$$x_n = \frac{a(n, n+1)}{a(n, n)}$$

$$x_i = \frac{a(i, n+1) - \sum_{j=i+1}^n a(i, j)x(j)}{a(i, i)}$$

$i = \text{fila} = n-1, n-2, \dots, 1$   
 $j = \text{columna}$

A continuación se presenta el pseudocódigo para calcular la matriz triangular superior.

```
Procedure Paso1_Matriz_Triangular_Gauss(N:Byte;Var A:matriz);
```

```
Var
```

```
    k,i : byte;
```

```
    Pivote : real;
```

```
Begin
```

```
    For k:=1 to N-1 do
```

```
        For i:=k+1 to N do
```

```
            Begin
```

```
                Pivote:=a[i,k]/a[k,k];
```

```
                For j:=k to N+1 do
```

```
                    a[i,j]:=a[i,j]-Pivote*a[k,j]
```

```
            End
```

```
End;
```

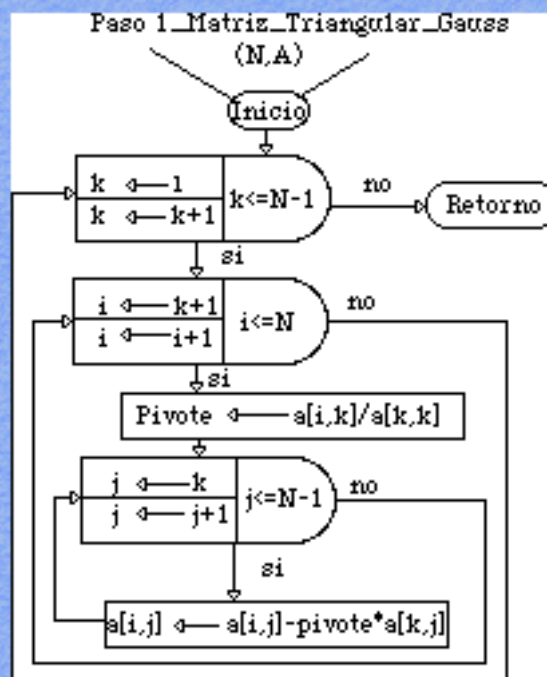


Figura 2.6.- Diagrama de flujo para la matriz triangular de Gauss paso 1.

```

Procedure paso2_Gauss_hacia_atras( N:byte; A:matriz; Var x:vector);
Var
Begin
  x[N]:=A[N,N+1]/A[N,N];
  for i:=N-1 downto 1 do
  Begin
    x[i]:=A[i,N+1];
    For j:=i+1 to N do
    x[i]:=x[i]-a[i,j]*x[j];
    x[i]:=x[i]/a[i,i]
  End;
End;

```

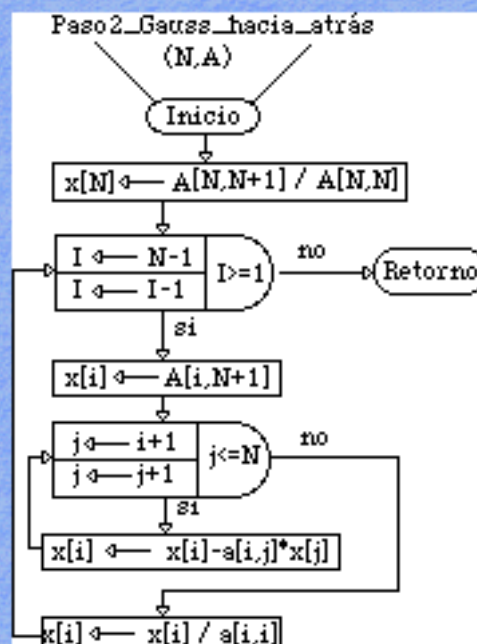


Figura 2.7.- Diagrama de flujo para Gauss hacia atras

¿De dónde sale la fórmula? Deducción

Método de Gauss

$$2x_1 + 5x_2 = -24$$

$$8x_1 - 3x_2 = 19$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -24 \\ 8 & -3 & 19 \end{array} \right)$$

$$a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik} * a_{kj}}{a_{kk}}$$

donde

k= Fila pivote

i= Fila

j= Columna

quedando el sistema de ecuaciones lineales como:

k=1,2,3,...,n-1

i=k+1,k+2,...,n

j=k,k+1,k+2,...,n+1

Queda por ejemplo para un sistema de ecuaciones lineales 3x3

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14}$$

$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24}$$

$$a_{33}x_3 = a_{34}$$

$$x_3 = \frac{a_{34}}{a_{33}} \Rightarrow x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{kk}}$$

$$x_2 = \frac{a_{24} - a_{23}x_3}{a_{22}} = \frac{a_{24} - \sum_{j=3}^3 a_{2j}x_j}{a_{22}}; i=2; k=2 \text{ _ pivote}$$

$$x_1 = \frac{a_{14} - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} = \frac{a_{14} - \sum_{j=2}^3 a_{1j}x_j}{a_{11}}; i=1; k=1 \text{ _ pivote}$$

[Regreso a la página principal.](#)

### 2.2.1 Eliminación de Gauss-Jordan

Por el método de Gauss-Jordan obtener la solución del sistema de ecuaciones lineales (SEL). La eliminación de Gauss-Jordan consiste en:

1.- Se obtiene una matriz diagonal (valores diferentes de cero en la diagonal y el resto cero) de la matriz aumentada.

$$A(n, n+1) = \left[ \begin{array}{ccc|c} d_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & d_2 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & d_3 & b_3 \end{array} \right]$$

donde :

$$d_1 = a_{11}; d_2 = a_{22}; d_3 = a_{33}$$

$$b_1 = a_{1n+1}; b_2 = a_{2n+1}; b_3 = a_{3n+1}$$

2.- Usando la fórmula:



$$a(i, j) = a(i, j) - \frac{a(i, k)a_{k,j}}{a_{(k,k)}}$$

```

K:=1 to n
  I:=1 to n con i<>k
    J:=k, k+1, ... to n+1

```

donde:

k= fila pivote; i= fila; j= columna; k=1,2,3,...,n con i≠ k; j=k,k+1,k+2,...,n+1.

3.- Se normaliza el elemento pivote

$$a(i, n+1) = \frac{a(i, n+1)}{a(i, i)}$$

$$a(i, i) = 1$$

donde i=1,2,3,...,n

4.- Los valores resultantes de la solución del sistema lineal están en:

x(i)=a(i,n+1) para i=1,2,3,...,n filas.

A continuación se presenta el programa para pascal que realiza el cálculo de Gauss-Jordan.

```

Procedure_Gauss-Jordan(N:byte; Var A:matriz);
Var
    k,i,j:byte;
    Pivote:real;
Begin
    { Paso 1 }
    For k:=1 to N do
        Begin
            { If a[k,k]=0
            Then
            Intercambia_filas(N,k,a);}
            { Lo que está como comentario mejora al método de Gauss-Jordan}
            For I:=1 to N do
                Begin
                    If I<>k
                    Then
                        Begin
                            Pivote:=a[I,k] / a[k,k];
                            For j:=k to N+1 do
                                a[i,j]:=a[i,j]-Pivote*a[k,j]
                            End
                        End
                End
            End
        End
    End;

```



```
{ Fin del Paso 1}  
For I:=1 to N do { Normalización del elemento pivote}  
Begin  
    a[I,N+1]:=a[I,N+1] / a[I,I];  
    a[I,I]:=1  
End  
End;
```

[Regreso a la página principal.](#)

## 2.3 ESTRATEGIAS DE PIVOTEO

### 2.3.1 Pivoteo parcial o pivoteo de columna máxima

Si se quiere reducir el error de redondeo, a menudo hay que realizar intercambio de renglones aún cuando los elementos del pivote no sean cero.

Ejemplo:

$$R_1: 0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17$$

$$R_2: 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78$$

Este sistema tiene la solución exacta  $x_1=10$  y  $x_2=1$ . Para dar una idea de los problemas del error de redondeo, en este sistema se va a realizar la eliminación gaussiana mediante la aritmética de redondeo a cuatro dígitos.

$$\left( \begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 5.291 & -6.130 & 46.78 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R1 \rightarrow \frac{-5.291}{0.003} R2 + R3 \\ R1 \rightarrow 1764 R2 + R3 \end{array}}$$

1763.666 Pero es a 4 dígitos, por lo que se redondea el cuarto dígito y después son ceros .

$$\left( \begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ \{0 & -104329.09(4 \text{ _ dígitos}) & 104422.66(4 \text{ _ dígitos})\} \\ 0 & 104300 & -104400 \end{array} \right)$$

$$0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17$$

$$-104300x_2 = -104400$$

$$\therefore x_2 = \frac{-104400}{-104300} = 1.001$$

$$x_1 = \frac{59.17 - 59.14x_2}{0.003} = \frac{59.17 - 59.14(1.001)}{0.003} = -9.71333(a \text{ _ } 4 \text{ _ dígitos}) = -9.713$$

$(-9.713, 1.001)$  Es el conjunto solución.

Ahora, si se hubiesen usado los valores precisos, es decir, con más cifras significativas:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 5.291 & -6.130 & 46.78 \end{array} \right) \xrightarrow[R1 \rightarrow \frac{-5.91}{0.003} R2 + R3]{} \rightarrow$$

-1763.666 a 4 decimales

$$\left( \begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 0 & 104297.1127 & 104402.9327 \end{array} \right)$$

$$0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17$$

$$104297.1127x_2 = 104402.9327$$

$$\therefore x_2 = \frac{104402.9327}{104297.1127} = 1.0010$$

$$x_1 = \frac{59.17 - 59.14x_2}{0.003} = \frac{59.17 - 59.14(1.0010)}{0.003} = -9.7133$$

(-9.713, 1.001) Conjunto solución a 4 cifras significativas.

Utilizando el mismo ejercicio pero contemplando solo dos cifras decimales en el resultado.

$$\left( \begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 5.291 & -6.130 & 46.78 \end{array} \right) \xrightarrow[R1 \rightarrow \frac{-5.91}{0.003} R2 + R3]{} \rightarrow$$

-1763.66 a 2 decimales

$$\left( \begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 0 & 104296.72 & 104402.54 \end{array} \right)$$

$$0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17$$

$$104296.72x_2 = 104402.54$$

$$\therefore x_2 = \frac{104402.54}{104296.72} = 1.00$$

$$x_1 = \frac{59.17 - 59.14x_2}{0.003} = \frac{59.17 - 59.14(1.00)}{0.003} = -10$$

(-10.00, 1.00) Conjunto solución a 2 decimales.

En este ejemplo observamos los problemas que pueden surgir cuando el elemento pivote (0.003) es pequeño en comparación con los demás elementos. Para evitar este problema empleamos el pivote parcial o pivote de columna seleccionando un elemento mayor para el pivote e intercambiando los renglones.



La estrategia más sencilla consiste en escoger el elemento en la misma columna que está debajo de la diagonal y que tiene el máximo valor absoluto; es decir, determinamos la más pequeña  $p$ ?  $k$  tal que:

$$|a_{pk}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|$$

$$\begin{array}{c} a_{11}a_{12} \dots a_{1k} \dots a_{1n}a_{1n+1} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2k} \dots a_{2n}a_{2n+1} \\ \vdots \\ a_{k1}a_{k2} \dots a_{kk} \dots a_{kn}a_{kn+1} \\ \vdots \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nk} \dots a_{nn}a_{nn+1} \end{array}$$

y efectuamos  $(R_k) \longleftrightarrow (R_p)$

Reconsideremos el sistema anterior:

$$R_1: 0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17$$

$$R_2: 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78$$

$$\max(|a_{11}^{(1)}|, |a_{21}^{(1)}|) = \max(|0.003|, |5.291|) = |5.291| = |a_{21}^{(1)}|$$

Por lo tanto, efectuamos la operación  $(R_2) \longleftrightarrow (R_1)$  para obtener el sistema:

$$R_1: 5.291x_1 - 6.13x_2 = 46.78$$

$$R_2: 0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17$$

Nuevamente, realizando la eliminación gaussiana mediante la aritmética de redondear a cuatro dígitos:

El multiplicador para este sistema es:

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 0.0005670$$

y la operación  $(R_2 - m_{21}R_1) \longleftrightarrow E_2$

reduce el sistema a:



$$5.291x_1 - 6.13x_2 = 46.78$$

$$59.14x_2 = 59.14$$

La respuesta de cuatro dígitos, da como resultado los valores correctos:

$$x_1 = 10 \text{ y } x_2 = 1.00$$

A la técnica anterior se le conoce como pivoteo parcial o pivoteo de columna máxima.

Ejercicio:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2.11 & -4.21 & 0.921 & 2.01 \\ 4.01 & 10.2 & -1.12 & -3.09 \\ 1.09 & 0.987 & 0.832 & 4.21 \end{array} \right)$$

$$\max(|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|) = \max(|2.11|, |4.01|, |1.09|) = |4.01| = |a_{21}|$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4.01 & 10.2 & -1.12 & -3.09 \\ 2.11 & -4.21 & 0.921 & 2.01 \\ 1.09 & 0.987 & 0.832 & 4.21 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R2 \rightarrow \frac{-2.11}{4.01}R1 + R2 \\ \quad -0.5261 \\ R3 \rightarrow \frac{-1.09}{4.01}R1 + R3 \\ \quad -0.2718 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 4.01 & 10.2 & -1.12 & -3.09 \\ 0 & -9.5762 & 1.5102 & 3.6356 \\ 0 & -1.7853 & 1.1364 & 5.0498 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} -0.2718 \\ R3 \rightarrow \frac{1.7853}{-9.5762}R2 + R3 \\ \quad -0.1864 \end{array}} \rightarrow$$

$$\max(|a_{22}|, |a_{32}|) = \max(|-9.5762|, |-1.7853|) = 9.5762 = |a_{22}|$$

queda \_igual

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4.01 & 10.2 & -1.12 & -3.09 \\ 0 & -9.5762 & 1.5102 & 3.6356 \\ 0 & 0 & 0.8548 & 4.3721 \end{array} \right)$$

$$4.01x_1 + 10.2x_2 - 1.12x_3 = -3.09$$

$$-9.5762x_2 + 1.5102x_3 = 3.6356$$

$$0.8548x_3 = 4.3721$$

$$\therefore x_3 = \frac{4.3721}{0.8548} = 5.1147$$

$$x_2 = \frac{3.6356 - 1.5102x_3}{-9.5762} = \frac{3.6356 - 1.5102(5.1147)}{-9.5762} = 0.4269$$

$$x_1 = \frac{-3.09 - 10.2x_2 + 1.12x_3}{4.01} = \frac{-3.09 - 10.2(0.4269) + 1.12(5.1147)}{4.01} = -0.4280$$

$(-0.4280, 0.4269, 5.1147)$  Es el conjunto solución.

[Regreso a la página principal.](#)

### 2.3.2 Pivoteo Parcial Escalado o Pivoteo de Escalado de Columna

En este método se coloca el elemento en el lugar del pivote más grande en relación con los elementos de su renglón.

El primer paso del procedimiento, consiste en definir, para cada renglón, un factor escalar  $S_i$  por medir de :

$$S_i = \max_{j=1,2,\dots,n} |a_{ij}|$$

donde:  $i=1,2,\dots,n$  y  $j$ = columnas.

Si para alguna  $i$  tenemos  $S_i=0$ , entonces el sistema no tiene una solución única. Esto es porque todos los elementos del  $i$ -ésimo renglón son cero.

El intercambio adecuado de renglones para poner ceros en la primera columna se determina seleccionando el menor entero  $k$  con:

$$\frac{|a_{k1}|}{S_k} = \max_{j=1,2,\dots,n} \frac{|a_{j1}|}{S_j}$$

$$y \text{ _ efectuando } (R_1) \longleftrightarrow (R_k)$$

Vamos a aplicar el pivoteo parcial escalado al siguiente ejemplo:

$$R_1 : 30.00x_1 + 591400x_2 = 591700$$

$$R_2 : 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78$$

$$S_1 = \max(|30.00|, |591400|) = 591400$$

$$S_2 = \max(|5.291|, |-6.130|) = 6.130$$

En consecuencia:

$$\frac{|a_{11}|}{S_1} = \frac{30.00}{591400} = 0.5073E^{-4}$$

$$\frac{|a_{21}|}{S_2} = \frac{5.291}{6.130} = 0.8631$$

El mayor valor corresponde al segundo renglón, y por lo tanto, se lleva a cabo el intercambiar:

$$(R_1) \longleftrightarrow (R_2)$$

$$5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78$$

$$30.00x_1 + 591400x_2 = 591700$$

Al aplicar la eliminación gaussiana a este sistema mediante la aritmética de redondeo a cuatro dígitos, obtenemos los resultados correctos:

$$x_1 = 10 \text{ y } x_2 = 1.00$$

Ejemplo:

Eliminación Gaussiana con pivoteo parcial escalado de columna.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales por medio de la aritmética de redondeo con 3 dígitos.

$$2.11x_1 - 4.21x_2 + 0.921x_3 = 2.01 \quad S_1$$

$$4.01x_1 + 10.2x_2 - 1.12x_3 = -3.09 \quad S_2$$

$$1.09x_1 + 0.987x_2 + 0.832x_3 = 4.21 \quad S_3$$



$$S_1 = 4.21; S_1 = \max(|2.11|, |-4.21|, |0.921|)$$

$$S_2 = 10.2; S_2 = \max(|4.01|, |10.2|, |-1.121|)$$

$$S_3 = 1.09; S_3 = \max(|1.09|, |0.987|, |0.832|)$$

$$\frac{|a_{11}|}{S_1} = \frac{2.11}{4.21} = 0.501 (i = 1)$$

$$\frac{|a_{21}|}{S_2} = \frac{4.01}{10.2} = 0.393 (i = 2)$$

$$\frac{|a_{31}|}{S_3} = \frac{1.09}{1.09} = 1 (i = 3)$$

$$\frac{|a_{k1}|}{S_k} = \max_{j=1,2,\dots,n} \frac{|a_{ij}|}{S_i}$$

$$R_1 \longleftrightarrow R_3; k = 1 \longleftrightarrow k = 3$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1.09 & 0.987 & 0.832 & 4.21 \\ 4.01 & 10.2 & -1.12 & -3.09 \\ 2.11 & -4.21 & 0.921 & 2.01 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R2 \rightarrow \frac{-4.01}{1.09} R1 + R2 \\ R3 \rightarrow \frac{-2.11}{1.09} R1 + R3 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1.09 & 0.987 & 0.832 & 4.21 \\ 0 & 6.57 & -4.18 & -18.6 \\ 0 & -6.12 & -0.689 & -6.16 \end{array} \right)$$

$$\frac{|a_{22}|}{S_2} = \frac{6.57}{10.2} = 0.644; i = 2 (\text{fila})$$

$$\frac{|a_{23}|}{S_3} = \frac{6.12}{4.21} = 1.45; i = 3 (\text{fila})$$

$$\frac{|a_{k2}|}{S_k} = \max_{j=1,2,\dots,n} \frac{|a_{ij}|}{S_i}; k = \text{fila\_a\_cambiar}$$

$$R_2 \longleftrightarrow R_3; k = 2 \longleftrightarrow k = 3 (\text{fila\_a\_cambiar})$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1.09 & 0.987 & 0.832 & 4.21 \\ 0 & -6.12 & -0.689 & -6.16 \\ 0 & 6.57 & -4.18 & -18.6 \end{array} \right) \xrightarrow{R3 \rightarrow \frac{-6.57}{-6.12} R2 + R3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1.09 & 0.987 & 0.832 & 4.21 \\ 0 & -6.12 & -0.689 & -6.16 \\ 0 & 0 & -4.92 & -25.2 \end{array} \right)$$

$$\therefore x_3 = \frac{-25.2}{-4.92} = 5.12$$

$$x_2 = 0.430$$

$$x_1 = -0.431$$

$(-0.431, 0.430, 5.12)$  Conjunto solución

[Regreso a la página principal.](#)





## 2.4 FACTORIZACION DE MATRICES

### 2.4.1 Método de Doolittle o Método de Crout

Este método de Doolittle se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones simultáneas a través de factorización de matrices.

El método de Doolittle consiste en descomponer la matriz A (matriz de coeficientes de las incógnitas) en dos matrices L y U.

Las matrices L y U deben ser matrices triangulares. L es una matriz triangular inferior, la cual en lo particular tiene todos los elementos de la diagonal principal igual a uno y U es una matriz triangular superior.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & 1 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{pmatrix}$$

$$A = LU$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{pmatrix}$$

El método de Doolittle consiste en encontrar los valores de los elementos de las matrices L y U a partir de la matriz A.

Después, para resolver el sistema:

$$Ax=b$$

Se efectúan las siguientes sustituciones:

$$LUx=b$$

$$Lz=b \text{ donde } z=Ux$$

De tal manera que:

1.- Se calcula z a partir de  $Lz=b$

2.- Se calcula x a partir de  $Ux=z$

Ejemplo para encontrar las matrices L y U a partir de A.

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{pmatrix}$$

Se van alternando renglones y columnas en ese orden, es decir, empezando con el primer renglón y multiplicando a todas las columnas. Después, tomando la primera columna y premultiplicando por el segundo renglón y todos los demás. Después, se toma el segundo renglón y se multiplica por la segunda, tercera y cuarta columna y todas las demás, y así sucesivamente hasta terminar.

Primer renglón x Primera columna  $a_{11}$

$$(1, 0, 0, 0)_{1 \times 4} \begin{pmatrix} U_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} = 1 \times U_{11} = a_{11} \Rightarrow U_{11} = 6$$

Primer renglón x Segunda columna  $a_{12}$

$$(1, 0, 0, 0)_{1 \times 4} \begin{pmatrix} U_{12} \\ U_{22} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} = 1 \times U_{12} = a_{12} \Rightarrow U_{12} = 2$$

Primer renglón x Tercera columna  $a_{13}$

$$(1, 0, 0, 0)_{1 \times 4} \begin{pmatrix} U_{13} \\ U_{23} \\ U_{33} \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} = 1 \times U_{13} = a_{13} \Rightarrow U_{13} = 1$$

Primer renglón x Cuarta columna  $a_{14}$

$$(1, 0, 0, 0)_{1 \times 4} \begin{pmatrix} U_{14} \\ U_{24} \\ U_{34} \\ U_{44} \end{pmatrix}_{4 \times 1} = 1 \times U_{14} = a_{14} \Rightarrow U_{14} = -1$$

Segundo renglón x Primera columna  $a_{21}$

$$(L_{21} \quad 1 \quad 0 \quad 0)_{1 \times 4} \begin{pmatrix} U_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} = L_{21}U_{11} = a_{21} \Rightarrow L_{21} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Tercer renglón x Primera columna  $a_{31}$

$$(L_{31} \quad L_{32} \quad 1 \quad 0)_{1 \times 4} \begin{pmatrix} U_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} = L_{31}U_{11} = a_{31} \Rightarrow L_{31} = \frac{1}{6}$$

Cuarto renglón x Primera columna  $a_{41}$

$$(L_{41} \quad L_{42} \quad L_{43} \quad 1)_{1 \times 4} \begin{pmatrix} U_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} = L_{41}U_{11} = a_{41} \Rightarrow L_{41} = -\frac{1}{6}$$

Segundo renglón x Segunda columna  $a_{22}$

$$(L_{21} \quad 1 \quad 0 \quad 0)_{1 \times 4} \begin{pmatrix} U_{12} \\ U_{22} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} = L_{21}U_{12} + 1U_{22} = a_{22} \Rightarrow \frac{1}{3}(2) + U_{22} = 4 \Rightarrow U_{22} = \frac{10}{3}$$

Segundo renglón x Tercera columna  $a_{23}$



$$(L_{21} \ 1 \ 0 \ 0)_{1 \times 4} \begin{pmatrix} U_{13} \\ U_{23} \\ U_{33} \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} = L_{21}U_{13} + 1U_{23} = a_{23} \Rightarrow \frac{1}{3}(1) + U_{23} = 1 \Rightarrow U_{23} = \frac{2}{3}$$

Segundo renglón x Cuarta columna  $a_{24}$

$$(L_{21} \ 1 \ 0 \ 0)_{1 \times 4} \begin{pmatrix} U_{14} \\ U_{24} \\ U_{34} \\ U_{44} \end{pmatrix}_{4 \times 1} = L_{21}U_{14} + 1U_{24} = a_{24} \Rightarrow \frac{1}{3}(-1) + U_{24} = 0 \Rightarrow U_{24} = \frac{1}{3}$$

Tercer renglón x Segunda columna  $a_{32}$

$$(L_{31} \ L_{32} \ 1 \ 0)_{1 \times 4} \begin{pmatrix} U_{12} \\ U_{22} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} = a_{32}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}(2) + L_{32}\left(\frac{10}{3}\right) = 1 \Rightarrow L_{32}\left(\frac{10}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} \Rightarrow L_{32} = \frac{1}{5}$$

Cuarto renglón x Segunda columna  $a_{42}$

$$(L_{41} \ L_{42} \ L_{43} \ 1)_{1 \times 4} \begin{pmatrix} U_{12} \\ U_{22} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} = L_{41}U_{12} + L_{42}U_{22} = a_{42}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{6}(2) + L_{42}\left(\frac{10}{3}\right) = 0 \Rightarrow L_{42}\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow L_{42} = \frac{1}{10}$$

Tercer renglón x Tercera columna  $a_{33}$

$$(L_{31} \ L_{32} \ 1 \ 0)_{1 \times 4} \begin{pmatrix} U_{13} \\ U_{23} \\ U_{33} \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} = a_{33}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}(1) + \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + U_{33} = 4 \Rightarrow \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{15}\right) + U_{33} = 4 \Rightarrow U_{33} = \frac{111}{30} = \frac{37}{10}$$

### Tercer renglón x Cuarta columna $a_{34}$

$$\begin{pmatrix} L_{31} & L_{32} & 1 & 0 \end{pmatrix}_{1 \times 4} \begin{pmatrix} U_{14} \\ U_{24} \\ U_{34} \\ U_{44} \end{pmatrix}_{4 \times 1} = L_{31}U_{14} + L_{32}U_{24} + U_{34} = a_{34}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}(-1) + \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + U_{34} = -1 \Rightarrow -\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{15}\right) + U_{34} = -1 \Rightarrow U_{34} = \frac{-27}{30}$$

### Cuarto renglón x Tercera columna $a_{43}$

$$\begin{pmatrix} L_{41} & L_{42} & L_{43} & 1 \end{pmatrix}_{1 \times 4} \begin{pmatrix} U_{13} \\ U_{23} \\ U_{33} \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} = L_{41}U_{13} + L_{42}U_{23} + L_{43}U_{33} = a_{43}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{6}(1) + \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + L_{43}\left(\frac{37}{10}\right) = -1 \Rightarrow -\frac{1}{6} + \left(\frac{2}{30}\right) + L_{43}\left(\frac{37}{10}\right) = -1 \Rightarrow U_{43} = \frac{-9}{37}$$

### Cuarto renglón x Cuarta columna $a_{44}$

$$\begin{pmatrix} L_{41} & L_{42} & L_{43} & 1 \end{pmatrix}_{1 \times 4} \begin{pmatrix} U_{14} \\ U_{24} \\ U_{34} \\ U_{44} \end{pmatrix}_{4 \times 1} = L_{41}U_{14} + L_{42}U_{24} + L_{43}U_{34} + U_{44} = a_{44}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{6}(-1) + \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{9}{37}\right)\left(-\frac{27}{30}\right) + U_{44} = 3 \Rightarrow \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{30}\right) + \frac{243}{1110} + U_{44} = 3 \Rightarrow U_{44} = 3.016$$

$\therefore A = LU$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/5 & 1 & 0 \\ -1/6 & 1/10 & -9/37 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 10/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 37/10 & -27/30 \\ 0 & 0 & 0 & 3.016 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$1.00x_1 + 0.333x_2 + 1.5x_3 - 0.333x_4 = 3.0$$

$$-2.01x_1 + 1.45x_2 + 0.5x_3 + 2.95x_4 = 5.4$$

$$4.32x_1 - 1.95x_2 + 2.08x_4 = 0.13$$

$$5.11x_1 - 4.00x_2 + 3.33x_3 - 1.11x_4 = 3.77$$



$$A = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.33 & 1.5 & -0.33 \\ -2.01 & 1.45 & 0.5 & 2.95 \\ 4.32 & -1.95 & 0 & 2.08 \\ 5.11 & 4.00 & 3.33 & -1.11 \end{pmatrix} = LU = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.01 & 1.0 & 0 & 0 \\ 4.32 & -1.60 & 1.00 & 0 \\ 5.11 & -2.69 & -6.04 & 1.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.00 & 0.33 & 1.5 & -0.33 \\ 0 & 2.12 & 3.52 & 2.28 \\ 0 & 0 & -0.85 & 7.17 \\ 0 & 0 & 0 & 50.0 \end{pmatrix}$$

$$Ax=b \quad 1^\circ Lz=b$$

$$Lux=b \quad 2^\circ Ux=z$$

$$1. - \begin{pmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.01 & 1.0 & 0 & 0 \\ 4.32 & -1.60 & 1.00 & 0 \\ 5.11 & -2.69 & -6.04 & 1.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5.4 \\ 0.13 \\ 3.77 \end{pmatrix}$$

$$1.00z_1 = 3.00$$

$$-2.01z_1 + z_2 = 5.4$$

$$4.32z_1 - 1.6z_2 + z_3 = 0.13$$

$$5.11z_1 - 2.69z_2 - 6.04z_3 + z_4 = 3.77$$

$$z_1 = 3; z_2 = 11.43; z_3 = 5.46; z_4 = 52.15$$

$$2. - \begin{pmatrix} 1.00 & 0.33 & 1.5 & -0.33 \\ 0 & 2.12 & 3.52 & 2.28 \\ 0 & 0 & -0.85 & 7.17 \\ 0 & 0 & 0 & 50.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11.43 \\ 5.46 \\ 52.15 \end{pmatrix}$$

$$1.00x_1 + 0.33x_2 + 1.5x_3 - 0.33x_4 = 3$$

$$2.12x_2 + 3.52x_3 + 2.28x_4 = 11.43$$

$$-0.85x_3 + 7.17x_4 = 5.46$$

$$50x_4 = 52.15$$

$$x_4 = 1.043$$

$$x_3 = 2.376$$

$$x_2 = 0.324$$

$$x_1 = -0.326$$

Factorización de matrices

$$A=LxU$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

L= Matriz triangular inferior

U= Matriz triangular superior

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 6 \\ 1 & 8 & -2 \\ -2 & 4 & -9 \end{pmatrix}; a_{ij} = \sum_{k=1}^3 L_{ik} U_{kj}$$

Se resuelve 1<sup>er</sup> renglón, 1<sup>a</sup> columna, 2<sup>o</sup> renglón, 2<sup>a</sup> columna, etc.

$$\begin{pmatrix} 10 & -3 & 6 \\ 1 & 8 & -2 \\ -2 & 4 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ -1/5 & 34/83 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -3 & 6 \\ 0 & 83/10 & -26/10 \\ 0 & 0 & -559/83 \end{pmatrix}$$

$a_{11}$

$$10 = L_{11}U_{11} + L_{12}U_{21} + L_{13}U_{31}$$

$$10 = 1 * U_{11} + 0 * 0 + 0 * 0$$

$$U_{11} = 10$$

$a_{12}$

$$-3 = L_{11}U_{12} + L_{12}U_{22} + L_{13}U_{32}$$

$$-3 = 1 * U_{12} + 0 * U_{22} + 0 * 0$$

$$U_{12} = -3$$

y así sucesivamente.

Ejercicio:

Encontrar la solución a:

$$\begin{pmatrix} 10 & -3 & 6 \\ 1 & 8 & -2 \\ -2 & 4 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.5 \\ -9 \\ -50 \end{pmatrix}$$

1<sup>ro</sup>.  $-Lz = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ -1/5 & 34/83 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.5 \\ -9 \\ -50 \end{pmatrix}$$

De este sistema de matrices se obtiene:

$$z_1 = 24.5$$

$$\frac{z_1}{10} + z_2 = -9$$

$$z_2 = -11.45$$

$$-\frac{1}{5}z_1 + \frac{34}{83}z_2 + z_3 = -50$$

$$z_3 = -40.41$$

$$2^\circ. - Ux = z$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -3 & 6 \\ 0 & 84/10 & -26/10 \\ 0 & 0 & -559/83 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.5 \\ -11.45 \\ -40.41 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{559}{83}x_3 = -40.41 \Rightarrow x_3 = 6$$

$$\frac{83}{10}x_2 - \frac{26}{10}x_3 = -11.45 \Rightarrow x_2 = 0.5$$

$$10x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 24.5 \Rightarrow x_1 = -1.0$$

Doolittle o Crout

$$A\bar{x} = \bar{b}; 1^\circ. - A = LU \Rightarrow \text{donde : } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$LUx = \bar{b}$$

$$Lz = \bar{b}$$

$$L \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -3 & 6 \\ 1 & 8 & -2 \\ -2 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$



$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a_{11}} & \overrightarrow{a_{12}} & \overrightarrow{a_{13}} & \overrightarrow{a_{14}} \\ \overrightarrow{a_{21}} & \overrightarrow{a_{22}} & \overrightarrow{a_{23}} & \overrightarrow{a_{24}} \\ \overrightarrow{a_{31}} & \overrightarrow{a_{32}} & \overrightarrow{a_{33}} & \overrightarrow{a_{34}} \\ \overrightarrow{a_{41}} & \overrightarrow{a_{42}} & \overrightarrow{a_{43}} & \overrightarrow{a_{44}} \end{pmatrix}$$

i=1

$$L =_{i=2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 34/83 & 1 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} \overrightarrow{10} & \overrightarrow{-3} & \overrightarrow{6} \\ 0 & 83/10 & -6/10 \\ 0 & 0 & -559/83 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} u_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = u_{11} = 10$$

$$a_{12} = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ 0 \end{pmatrix} = u_{12} = -3$$

$$a_{13} = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix} = u_{33} = 6$$

$$a_{21} = (l_{21} \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} u_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = l_{21} u_{11} = 1 \Rightarrow l_{21} = \frac{1}{u_{11}} = 0.1$$

$$a_{31} = (l_{31} \ l_{32} \ 0) \begin{pmatrix} u_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = l_{31} u_{11} = 1 \Rightarrow l_{31} = \frac{1}{u_{11}} = -\frac{1}{5}$$

$$a_{22} = (l_{21} \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ 0 \end{pmatrix} = l_{21} u_{12} + u_{22} = 8 \Rightarrow \frac{1}{10}(-3) + u_{22} = 8 \Rightarrow u_{22} = \frac{83}{10}$$

$$a_{23} = (l_{21} \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix} = l_{21} u_{13} + u_{23} = -2 \Rightarrow \frac{1}{10}(6) + u_{23} = -2 \Rightarrow u_{23} = \frac{-23}{10}$$



$$a_{32} = (l_{31} \quad l_{32} \quad 1) \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ 0 \end{pmatrix} = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 4 \Rightarrow -\frac{1}{5}(-3) + l_{32}\frac{83}{10} = 4 \Rightarrow l_{32} = \frac{34}{83}$$

$$a_{33} = (l_{31} \quad l_{32} \quad 1) \begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix} = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = -9$$

$$\Rightarrow u_{33} = -9 - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = -9 - \left(\frac{-2}{10}\right)6 - \left(\frac{34}{83}\right)\left(\frac{-26}{10}\right) = -\frac{559}{83}$$

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

$$A = LU$$

$$LU\bar{x} = \bar{b}$$

$$\text{donde } (u\bar{x} = z)$$

$$U\bar{z} = Lz = \bar{b}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ -2/10 & 34/83 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.5 \\ -9 \\ -50 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = 24.5$$

Sustituyendo \_valores :

$$\frac{1}{10}z_1 + z_2 = -9 \Rightarrow z_2 = -9 - \frac{1}{10}(24.5) = -11.45$$

$$-\frac{2}{10}z_1 + \frac{34}{83}z_2 + z_3 = -50 \Rightarrow z_3 = -50 + \frac{2}{10}(24.5) - \frac{34}{83}(-11.45) = -40.41$$

$$z = \begin{pmatrix} 24.5 \\ -11.45 \\ -40.41 \end{pmatrix}$$

Después :  $U\bar{x} = z$

$$\begin{pmatrix} 10 & -3 & 6 \\ 0 & 83/10 & -26/10 \\ 0 & 0 & -559/83 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.5 \\ -11.45 \\ -40.41 \end{pmatrix}$$

$$10x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 24.5$$

$$\frac{83}{10}x_2 - \frac{26}{10}x_3 = -11.45$$

$$-\frac{559}{83}x_3 = -40.41$$

$$\therefore x_3 = 6$$

$$x_2 = 0.5$$

$$x_1 = -1.3$$

$(-1.3, 0.5, 6)$  Es el conjunto solución.

Ejercicio:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Crout o Doolittle.

$$3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 25$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 9$$

$$4x_1 + 7x_2 + x_3 = 11$$

$$\text{Paso}_1) A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 25 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 4/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a_{11}} & \overrightarrow{a_{12}} & \overrightarrow{a_{13}} \\ \downarrow a_{21} & \overrightarrow{a_{22}} & \overrightarrow{a_{23}} \\ \downarrow a_{31} & \downarrow a_{32} & \overrightarrow{a_{33}} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ L_{21} \\ L_{31} \end{pmatrix}$$

$$\mu_{11} = 3$$

$$a_{12} = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{22} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu_{12} = -5$$

$$a_{13} = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{22} \\ \mu_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mu_{13} = 4$$

$$a_{21} = (L_{21} \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 = 3L_{21} \Rightarrow L_{21} = \frac{1}{3}$$

$$a_{31} = (L_{31} \ L_{32} \ 1) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L_{31} = \frac{4}{3}$$

$$a_{22} = (1/3 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} -5 \\ \mu_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -1 = -\frac{5}{3} + \mu_{22} \Rightarrow \mu_{22} = \frac{2}{3}$$

$$a_{23} = (1/3 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 4 \\ \mu_{23} \\ \mu_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow 2 = \frac{4}{3} + \mu_{23} \Rightarrow \mu_{23} = \frac{2}{3}$$

$$a_{32} = \left(\frac{4}{3} \ L_{32} \ 1\right) \begin{pmatrix} -5 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 7 = -\frac{20}{3} + \frac{2}{3}L_{32} \Rightarrow L_{32} = \frac{41}{2}$$

$$a_{33} = \left(\frac{4}{3} \ \frac{41}{2} \ 1\right) \begin{pmatrix} 4 \\ 2/3 \\ \mu_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow 1 = \frac{16}{3} + \frac{82}{6} + \mu_{33} \Rightarrow \mu_{33} = -18$$



Paso\_2

$$Lz = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 41/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = 25$$

$$\frac{1}{3}z_1 + z_2 = 9$$

$$\frac{4}{3}z_1 + \frac{41}{2}z_2 + z_3 = 11$$

$$\therefore z_1 = 25$$

$$z_2 = 9 - \frac{1}{3}z_1 = \frac{2}{3}$$

$$z_3 = 11 - \frac{4}{3}z_1 - \frac{41}{2}z_2 = -36$$

$$Ux = z$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 2/3 \\ -36 \end{pmatrix}$$

$$3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 25$$

$$\frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{2}{3}$$

$$-18x_3 = -36$$

$$x_3 = 2$$

$$x_2 = \frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_3}{2/3} = -1$$

$$x_1 = \frac{25 + 5x_2 - 4x_3}{3} = 4$$

$$\therefore (4, -1, 2) \text{ Conjunto\_solución}$$

Por el método de Crout o de Dolittle obtener la solución al SEL.

El método de Crout consiste en lo siguiente:

Paso1 .- Se hace la descomposición de la matriz A en la matriz L (matriz triangular inferior) y la matriz V (matriz triangular superior) con las siguientes fórmulas:



Condición: a) con  $i \geq j$

$$L(i, j) = a(i, j) - \sum_{k=1}^{j-1} L(i, k)u(k, j)$$

Condición: b) con  $i < j$

$$U(i, j) = \left[ a(i, j) - \sum_{k=1}^{i-1} L(i, k)u(k, j) \right] / L(i, j)$$

donde deben cumplirse las siguientes condiciones:

$i$ = fila  $j$ = columna

los índices corren

$i=1,2,3,\dots,n$

$j=1,2,3,\dots,n$

Paso 2.-  $Lz=B$  por lo que debe encontrarse  $y(I)$  con la siguiente ecuación:

$$z(i) = \left[ b(i) - \sum_{k=1}^{i-1} L(i, k)z(k) \right] / L(i, i)$$

donde :  $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Paso 3.-  $Ux=z$ , por lo que debe encontrarse  $x(i)$  con la siguiente ecuación:

$$x(i) = z(i) - \sum_{k=i+1}^n u(i, k)x(k)$$

donde :  $i = n, n-1, n-2, n-3, \dots, 1$

Procedure Inicializa LU(N:Byte;Var L,U:matriz);

Var

    I,j:byte;

Begin

    For i:= 1 to N do

        For j:= 1 to N do

            Begin

                L[i,j]:=0;

                If i=j

                Then

                    U[i,j]:=1

```

Else
U[i,j]:=0

```

```

End

```

```

End;

```

```

Procedure paso1_Crout (N:byte;A:matriz;Var L,U:matriz);

```

```

{A=LU}

```

```

Var

```

```

    k,i,j:byte;

```

```

Begin

```

```

    For i:=1 to N do

```

```

        For j:= 1 to n do

```

```

            If i >=j

```

```

            Then

```

```

                Begin

```

```

                    L[i,j]:=a[i,j];

```

```

                    For k:= 1 to j-1 do

```

```

                        L[i,j]:=L[i,j]-L[i,k]xU[k,j]

```

```

                End

```

```

            Else

```

```

                Begin

```

```

                    U[i,j]:=a[i,j];

```

```

                    For k:= 1 to I-1 do

```

```

                        U[i,j]:=U[i,j]-L[i,k]xU[k,j];

```

```

                    U[i,j]:=U[i,j]/ L[i,i]

```

```

                End

```

```

End;

```

```

Procedure paso2_Crout(N:Byte;L:matriz;B:vector;Var z:vector);

```

```

{Lz=B}

```

```

Var

```

```

    i,k:byte;

```

```

Begin

```

```

    For i:= 1 ti N do

```

```

        Begin

```

```

            z[i]:=B[i];

```

```

            For k:= 1 to i-1 do

```

```

                z[i]:=z[i]-L[i,k]xz[k];

```

```

            z[i]:=z[i]/L[i,i]

```

```

        End

```

```

End;

```

```

Procedure paso3_Crout (N:byte;U:matriz;y:vector;Var x:Vector);

```

```

{Ux=z}

```

```

Var

```

```

    i,k:byte;

```

```

Begin

```

```
For i:= N downto 1 do
Begin
  x[i]:=z[i];
  For k:=i+1 to n do
    x[i]:=x[i]-u[i,k]x x[k]
  End
End
```

End;

[Regreso a la página principal.](#)

## 2.5 Aplicación de Matrices

Se tiene un grupo de matrices que son muy importantes para las transformaciones tales como traslación, rotación, escalamiento, etc. Estas sirven para graficación, robótica, realidad virtual, y computación para la representación de objetos en segunda dimensión (2D) y en tercera dimensión (3D). Las matrices para 2D son :

$$\text{Rot} = \text{Rotación} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tras} = \text{Traslación} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Esc} = \text{Escalamiento} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Ejemplo :**

Los puntos  $P_1=(2,1)$ ;  $P_2=(2,4)$  y  $P_3=(5,1)$  forman un triángulo, por lo que se desea rotar 45 grados , después trasladar en  $T_x = 2$  y  $T_y = 4$  y finalmente escalar en  $S_x= 2$  y  $S_y = 2$ , represente cada una de las transformaciones para visualizar como queda el triángulo después de cada transformación.

**Solución :**

Los 45 grados = 0.7854 radianes.

Los puntos pueden ser representados en una matriz de puntos :

$$\text{MatPtos} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \text{ que al dibujarse queda como el triángulo No. 1.}$$



$$\text{MatTrans} = \begin{bmatrix} \cos(0.7854) & -\sin(0.7854) & 0 \\ \sin(0.7854) & \cos(0.7854) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{MatTrans} = \begin{bmatrix} 0.7071 & -1.4142 & 2.8284 \\ 2.1213 & 4.2426 & 4.2426 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Que dibujarse queda como el triángulo No 2. Ahora se traslada  $T_x = 2$  y  $T_y = 4$  :

$$\text{MatTrans} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 & -1.4142 & 2.8284 \\ 2.1213 & 4.2426 & 4.2426 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{MatTrans} = \begin{bmatrix} 2.7071 & 0.5858 & 4.8284 \\ 6.1213 & 8.2426 & 8.2426 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Que al dibujarse queda como el triángulo No. 3. Ahora se escala en  $S_x = 2$  y  $S_y = 2$  :

$$\text{MatTrans} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.7071 & 0.5858 & 4.8284 \\ 6.1213 & 8.2426 & 8.2426 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{MatTrans} = \begin{bmatrix} 5.4142 & 1.1716 & 9.6568 \\ 12.2426 & 16.485 & 16.4852 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Que al dibujarse queda como el triángulo No. 4.

Si queremos ver como se multiplican las matrices, vamos hacia atrás :

$$\text{MatTrans} = \text{Esc} * \text{MatTras1}$$

Pero, ¿Quién es MatTras1?

$$\text{MatTras1} = \text{Tras} * \text{MatTras2}$$

Así que queda :

$$\mathbf{MatTras} = \mathbf{Esc} * \mathbf{Tras} \mathbf{MatTras2}$$

**Pero, ¿Quién es MatTras2?**

$$\mathbf{MatTras2} = \mathbf{Rot} * \mathbf{MatTras3}$$

**Así que queda :**

$$\mathbf{MatTras} = \mathbf{Esc} * \mathbf{Tras} * \mathbf{Rot} * \mathbf{MatTras3}$$

**Pero, ¿Quién es MatTras3?**

$$\mathbf{MatTras3} = \mathbf{I} * \mathbf{MatPtos}$$

**Así que queda :**

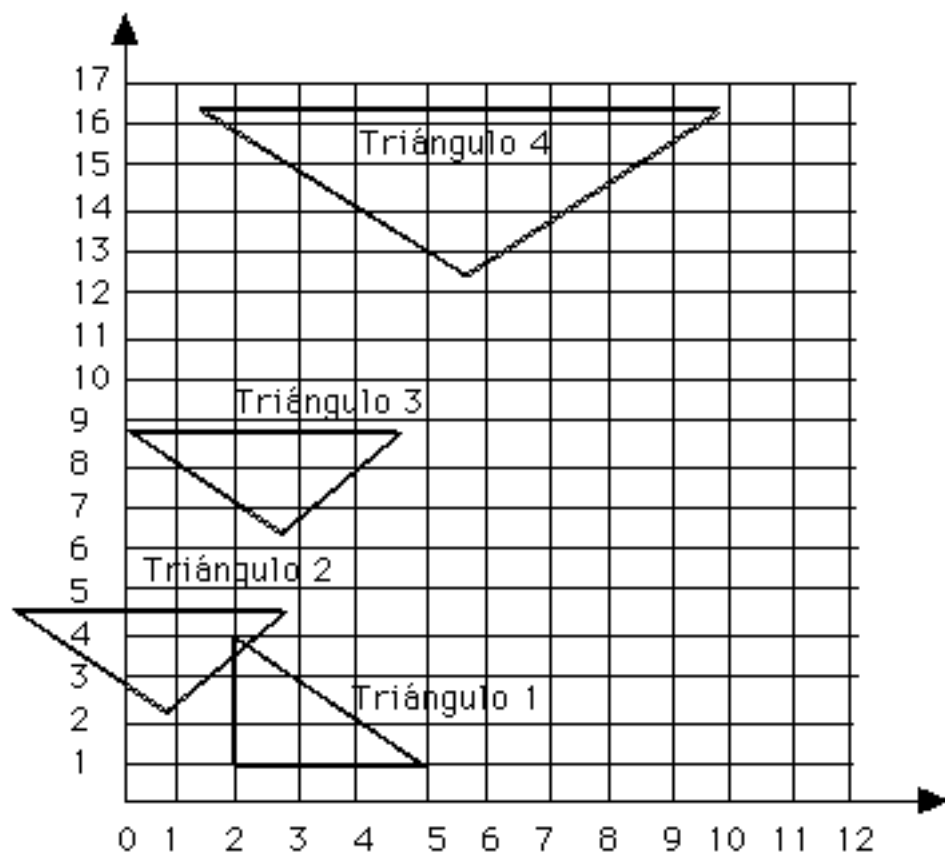
$$\mathbf{MatTras} = \mathbf{Esc} * \mathbf{Tras} * \mathbf{Rot} * \mathbf{I} * \mathbf{MatPtos}$$

**Siendo :**

$$\mathbf{MatPtos} = \text{Matriz de puntos} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**MatTras3 se hace necesaria desde el punto de vista computacional para no alterar la matriz de puntos por si se desea inicializar nuevamente el proceso.**

**La siguiente figura muestra los cuatro triángulos correspondientes a las diferentes transformaciones del triángulo original No. 1.**



---

[Regreso a la página principal.](#)

## 2.5 MINIMOS CUADRADOS

Los mínimos cuadrados lineal, se utilizan, entre otras cosas o principalmente, para ajustar datos a una línea recta de la forma  $y=ax+b$ . Para ello lo que se quiere es minimizar el valor real con respecto al valor calculado y para ello se emplea la siguiente ecuación:

$$F \min = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 \quad (1)$$

Donde se desea que F sea la mínima diferencia entre los valores reales ( $y_i$ ) y los valores calculados a partir de:  $y_{i \text{ cal}} = ax_i + b$  (2)

Para encontrar los valores de a y de b se deriva parcialmente la ecuación (1) con respecto a a y b. De manera que se obtienen 2 ecuaciones las cuales se trabajan simultáneamente, y así finalmente encontrar los valores de a y b.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F \min}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 \\ 0 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial a} [y_i - (ax_i + b)]^2 \\ 0 &= 2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)](-x_i) \\ 0 &= \sum_{i=1}^n (-x_i)[y_i - (ax_i + b)] \\ 0 &= - \sum_{i=1}^n [x_i y_i + x_i(ax_i + b)] \\ 0 &= - \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i) \\ \sum_{i=1}^n ax_i^2 + \sum_{i=1}^n bx_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i &= 0 \end{aligned}$$



$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0 \text{ --- Ecuación(3)}$$

$$\frac{\partial F \min}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$$

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial b} [y_i - (ax_i + b)]^2$$

$$0 = \sum_{i=1}^n 2[y_i - (ax_i + b)](-1)$$

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] = 0$$

$$\sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n ax_i - \sum_{i=1}^n b = 0$$

$$\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - nb = 0 \text{ (Ecuación(4))}$$

Despejando b de la ecuación 4:

$$b = \frac{\sum y_i - a \sum x_i}{n} \text{ --- Ecuación(5)}$$

Substituyendo la ecuación (5) en la ecuación (3)

$$a \sum x_i^2 + \left( \frac{\sum y_i - a \sum x_i}{n} \right) \sum x_i - \sum x_i y_i = 0$$

$$a \sum x_i^2 + \frac{\sum x_i \sum y_i - a \sum x_i \sum x_i}{n} - \sum x_i y_i = 0$$

multiplicando todo por n y reacomodando

$$-n \sum x_i y_i + an \sum x_i^2 + \sum x_i \sum y_i - a(\sum x_i)^2 = 0$$

dejando los términos con a en el primer miembro

$$an \sum x_i^2 - a(\sum x_i)^2 = n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i = 0$$

factorizando a

$$a[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] = n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i$$

despejando a

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \text{ --- Ecuación(6)}$$

Substituyendo (6) en (5)

$$\begin{aligned} nb &= \sum y_i - a \sum x_i \\ nb &= \sum y_i - \left( \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \right) \sum x_i \\ nb &= \sum y_i - \frac{n \sum x_i \sum x_i y_i - \sum x_i \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\ b &= \frac{\sum y_i}{n} - \frac{n \sum x_i \sum x_i y_i - (\sum x_i)^2 \sum y_i}{n^2 \sum x_i^2 - n(\sum x_i)^2} \\ b &= \frac{\sum y_i [n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] - n(\sum x_i)^2 y_i + (\sum x_i)^2 \sum y_i}{n^2 \sum x_i^2 - n(\sum x_i)^2} \\ b &= \frac{n \sum y_i \sum x_i^2 - \sum y_i (\sum x_i)^2 - n(\sum x_i)^2 y_i + (\sum x_i)^2 \sum y_i}{n^2 \sum x_i^2 - n(\sum x_i)^2} \\ b &= \frac{n(\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i)}{n(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)} \\ b &= \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \text{ --- Ecuación(7)} \end{aligned}$$

A continuación se presentan las funciones para programar el problema de los mínimos cuadrados lineal.

```
Function Sumatoria xi (N:Byte;x:vector):real;
```

```
Var
```

```
Begin
```

```
Suma:=0;
```

```
For i:=1 to N do
```

```
Suma:=suma+x[i];
```

Sumatoria  $x_i := \text{suma}$

End;

Function Sumatoria  $x_i y_i$  (N:Byte;x,y:vector):real;

Var

Begin

Suma:=0;

For i:=1 to N do

Suma:=suma+x[i]\*y[i];

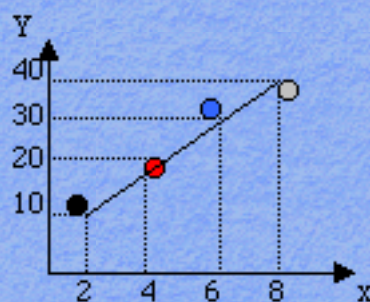
Sumatoria  $x_i y_i := \text{suma}$

End;

Ejemplo:

Tratemos de aproximar a una recta:

i	$x_i$	y
1	2	2
2	4	11
3	6	28
4	8	40





$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a = \frac{4(2 * 2 + 4 * 11 + 6 * 28 + 8 * 40) - [2 + 4 + 6 + 8][2 + 11 + 28 + 40]}{4(2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2) - (2 + 4 + 6 + 8)^2}$$

$$a = \frac{524}{80} = 6.55$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{(2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2)(2 + 11 + 28 + 40) - (2 * 2 + 4 * 11 + 6 * 28 + 8 * 40)(2 + 4 + 6 + 8)}{4(2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2) - (2 + 4 + 6 + 8)^2}$$

$$b = \frac{9720 - 10720}{480 - 400} = \frac{-1000}{80} = -12.5$$

$$y_i^{cal} = ax_i + b$$

$$y_i^{cal} = 6.55x_i - 12.5$$

i	X <sub>i</sub>	Y <sub>i</sub>	y <sub>i</sub> <sup>cal</sup>
1	2	2	0.6
2	4	11	13.7
3	6	28	26.8
4	8	40	33.9

Donde los valores  $y_{i\text{cal}}$  significan valores calculados con la ecuación obtenida a través del método de mínimos cuadrados que son valores aproximados de  $y_i$  los cuales caen sobre una línea recta. Y esta línea recta pasa entre todos los puntos  $y_i$  experimentales. Se pueden usar como valores de  $x_i$  que estén en el intervalo de los  $x_i$  dados.

Ejercicio:

Encontrar la recta  $y_i = ax_i + b$  que mejor represente a los siguientes puntos.

i	x <sub>i</sub>	y <sub>i</sub>



1	1	1.3
2	2	3.5
3	3	4.2
4	4	5.0
5	5	7.0
6	6	8.8
7	7	10.1
8	8	12.5
9	9	13.0
10	10	15.6

Respuesta:

$$a = \frac{10(572.4) - 55(81)}{10(385) - (55)^2} = 1.538$$

$$b = \frac{385(81) - 55(572.4)}{10(385) - (55)^2} = -0.360$$

$$y_i = ax_i + b$$

$$y_i^{col} = 1.538x_i - 0.36$$

i	$x_i$	$y_i$	$y_i^{cal}$
1	1	1.3	1.18
2	2	3.5	2.72
3	3	4.2	4.25
4	4	5.0	5.79
5	5	7.0	7.33
6	6	8.8	8.87
7	7	10.1	10.41

8	8	12.5	11.94
9	9	13.0	13.48
10	10	15.6	15.02

[Regreso a la página principal.](#)

## Aproximación Multilineal con Mínimos Cuadrados

Con frecuencia se tienen funciones de más de una variable; esto es,  $f(u,v,z)$ . Si se sospecha una funcionalidad lineal en las distintas variables; es decir, si se piensa que a función

$$y = a_0 + a_1u + a_2v + a_3z$$

puede ajustar los datos de la tabla siguiente

Puntos	u	v	z	y
1	$u_1$	$v_1$	$z_1$	$f(u_1, v_1, z_1)$
2	$u_2$	$v_2$	$z_2$	$f(u_2, v_2, z_2)$
3	$u_3$	$v_3$	$z_3$	$f(u_3, v_3, z_3)$
M	M	M	M	M
n	$u_n$	$v_n$	$z_n$	$f(u_n, v_n, z_n)$

Se puede aplicar el método de los mínimos cuadrados para determinar los coeficientes  $a_0, a_1, a_2$  y  $a_3$  que mejor aproximen la función de varias variables tabulada. El procedimiento es análogo al descrito anteriormente y consiste en minimizar la función

$$\sum_{i=1}^n [(a_0 + a_1u_i + a_2v_i + a_3z_i) - y_i]^2$$

que derivada parcialmente con respecto de cada coeficiente por determinar: coeficientes  $a_0, a_1, a_2$  y  $a_3$  e igualada a cero cada una, queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{i=1}^n [(a_0 + a_1u_i + a_2v_i + a_3z_i) - y_i]^2 &= 2 \sum_{i=1}^n [(a_0 + a_1u_i + a_2v_i + a_3z_i) - y_i] \quad 1 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=1}^n [(a_0 + a_1u_i + a_2v_i + a_3z_i) - y_i]^2 &= 2 \sum_{i=1}^n [(a_0 + a_1u_i + a_2v_i + a_3z_i) - y_i] u_i = 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_2} \sum_{i=1}^n [(a_0 + a_1u_i + a_2v_i + a_3z_i) - y_i]^2 &= 2 \sum_{i=1}^n [(a_0 + a_1u_i + a_2v_i + a_3z_i) - y_i] v_i = 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_3} \sum_{i=1}^n [(a_0 + a_1u_i + a_2v_i + a_3z_i) - y_i]^2 &= 2 \sum_{i=1}^n [(a_0 + a_1u_i + a_2v_i + a_3z_i) - y_i] z_i = 0 \end{aligned}$$

ecuaciones que rearrregladas generan el sistema algebraico lineal siguiente :

$$\begin{aligned} na_0 + a_1 \sum u + a_2 \sum v + a_3 \sum z &= \sum y \\ a_0 \sum u + a_1 \sum u^2 + a_2 \sum uv + a_3 \sum uz &= \sum uy \\ a_0 \sum v + a_1 \sum vu + a_2 \sum v^2 + a_3 \sum vz &= \sum vy \\ a_0 \sum z + a_1 \sum zu + a_2 \sum zv + a_3 \sum z^2 &= \sum zy \end{aligned}$$



En las incógnitas  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_3$ . Para simplificar la escritura se han omitido los índices I, de u, v, y z y los límites de las sumatorias, que van de 1 hasta n.

## Problema:

A partir de un estudio experimental acerca de la estabilización de arcilla muy plástica, se observó que el contenido de agua para moldeado con densidad óptima dependía linealmente de los porcentajes de cal y puzolana mezclados con la arcilla. Se tuvieron así los resultados que se dan abajo. Ajuste una ecuación de la forma :

$$y = a_0 + a_1u + a_2v$$

a los datos de dicha tabla.

Agua (%) y	Cal (%) u	Puzolana (%) v
27.5	2.0	18.0
28.0	3.5	16.5
28.8	4.5	10.5
29.1	2.5	2.5
30.0	8.5	9.0
31.0	10.5	4.5

Solución en excel.



---

## 3.0 RAICES DE UNA ECUACION

---

### 3.1 METODOS PRELIMINARES

Los métodos numéricos para tratar los problemas relacionados con raíces de una ecuación, sirven para obtener aproximaciones a las soluciones de ecuaciones de las cuales no es posible obtener respuesta exacta con métodos algebraicos (Solo respuestas aproximadas). Por ejemplo, la ecuación:

$$1564000=1000000*e^{\lambda}+(435000/\lambda)*(e^{\lambda}-1)$$

de la cual se deseará obtener " $\lambda$ ".

Uno de los problemas básicos de la aproximación numérica, es el problema de la búsqueda de las raíces.

[Regreso a la página principal](#)

---

#### 3.1.1 Método de bisección o bisecciones sucesivas o búsqueda binaria

1.- Método de bisección o bisecciones sucesivas de búsqueda binaria.

Este es uno de los problemas de aproximación más antiguos y sin embargo la investigación correspondiente todavía continua.

Supongamos que  $f(x)$  es una función continua definida en el intervalo  $[a,b]$  con  $f(a)$  y  $f(b)$  de signos diferentes.

El método de bisección nos dice que de acuerdo al teorema del valor intermedio existe un número  $p$  en  $a,b$  tal que  $f(p)=0$ .

Aunque el procedimiento en el caso en que  $f(a)$  y  $f(b)$  tengan signos diferentes y exista más de una raíz en el intervalo  $(a,b)$ , por razones de simplicidad suponemos que la raíz de este intervalo es única.

El método de bisección requiere dividir varias veces a la mitad los subintervalos de  $[a,b]$  y, en cada paso, localizar la mitad que contenga a  $p$ .

Para empezar se supone que  $a_1=a$  y  $b_1=b$  y que sea  $p_1$  el punto medio de  $f(a_1)$  y  $f(b_1)$ , es decir:

$$p_1 = \frac{1}{2} (a_1 + b_1)$$

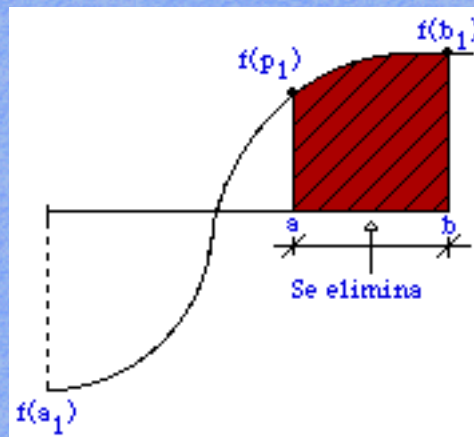


Figura 3.1.-  $f(p_1)$  tiene signo diferente a  $f(a_1)$  entonces acá está la raíz;  $f(p_1)$  tiene signo igual a  $f(b_1)$  entonces esta mitad se elimina.

si  $f(p_1)=0$  entonces  $p=p_1$

si  $f(p_1)$  y  $f(a_1)$  tienen el mismo signo, entonces  $p \in (p_1, b_1)$  y  $a_2=p_1$  y  $b_2=b_1$

si  $f(p_1)$  y  $f(a_1)$  tiene signos opuestos entonces  $p \in (a_1, p_1)$  y  $a_2=a_1$  y  $b_2=p_1$

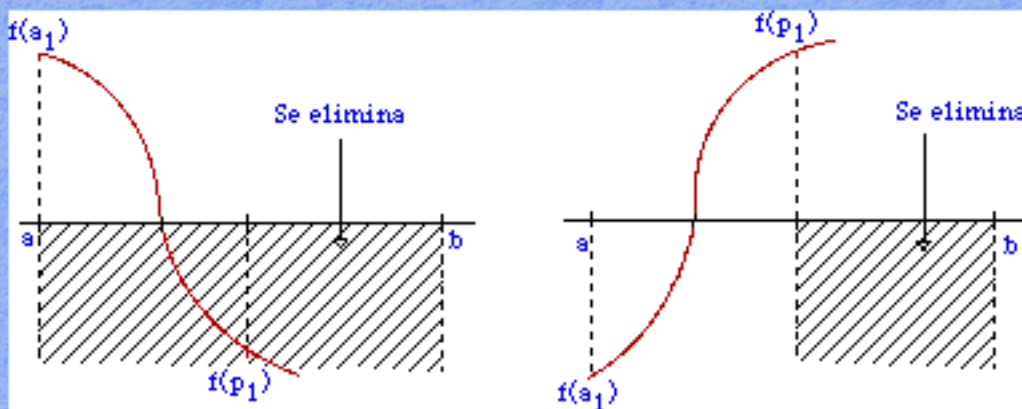


Figura 3.2.- Áreas de eliminación.

Después volvemos a aplicar el proceso al intervalo  $[a_2, b_2]$ . Así se continua hasta alcanzar algún criterio de convergencia. Un buen criterio de convergencia es el que hace referencia al error relativo aproximado (ERA).

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{p_N} < \xi \quad \text{para } p_{N1} \neq 0$$

Donde  $\xi$  representa la tolerancia permitida con respecto al error relativo. Al trabajar programas de computadora conviene fijar el número máximo de iteraciones que se efectuarón.

En la figura 3.3 se ilustra gráficamente el método de bisección.



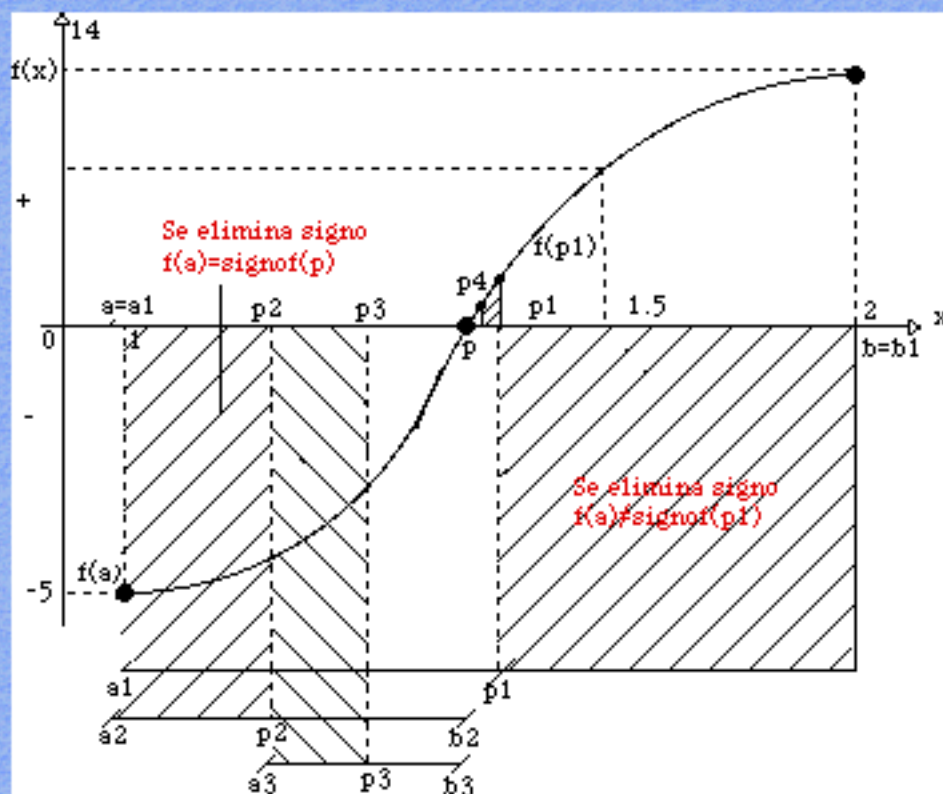


Figura 3.3.- Método de bisección

Ejercicio:

Encontrar la raíz de:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 \text{ en } [1, 2]$$

usando el método de Bisecciones sucesivas en el intervalo  $[1, 2]$ , se sugiere trabajar con cuatro cifras significativas después del punto decimal. Y usar  $\alpha$ .

$\xi = 10^{-4}$  o  $\xi = 0.0001$  o sea que el error relativo sea menor a 0.0001.

Solución:

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} = \frac{|1.36517 - 1.36515|}{|1.36517|} = 0.0000146 \therefore x = 1.36517$$

$$a=1, b=2$$

$$f(a) = (1)^3 + 4(1)^2 - 10 = -5$$

$$f(b) = (2)^3 + 4(2)^2 - 10 = 14$$

signo  $f(a) = -5$  es diferente al signo  $f(b)$  por lo que hay raíz

$$p_{\text{ant}} \leftarrow 32000$$

$$\text{Itera} \leftarrow 1$$

$$\xi \leftarrow 0.0001$$

Encontrado  $\leftarrow$  Falso

$$p_{\text{act}} = (a+b)/2 = (1+2)/2 = 1.5$$

$$f(p_{\text{act}} = 1.5) = (1.5)^3 + 4(1.5)^2 - 10 = 2.375$$

$$f(p_{\text{act}} = 1.5) \text{ ¿es } =? \text{ o no}$$

$$ERA = \frac{|1.5 - 32000|}{|1.5|} 21332 > \xi$$

signo( $p_{act}=1.5$ ) ¿es=? signo( $f(a)=-5$ ) no entonces:

$b = p_{act} = 1.5$

$a = 1$

$p_{ant} \blacklozenge p_{act} = 1.5$

$Itera := Itera + 1 = 1 + 1 = 2$

$p_{act} = (a+b) / 2 = (1+1.5) / 2 = 1.25$

$f(p_{act}) = (1.25)^3 + 4*(1.25)^2 - 10 = -1.7968$

$f(p_{act} = 1.25) = -1.7968$  ¿es=? 0 no

$$ERA = \frac{|1.25 - 1.5|}{|1.25|} 0.2$$

no es menor que  $\xi$

Signo( $f_{p_{act}} = -1.7968$ ) ¿es=? signo( $f(a) = -5$ ) si

$a = p_{act} = 1.25$

$b = 1.5$

$p_{ant} \blacklozenge p_{act} = 1.25$

$Itera := Itera + 1 = 2 + 1 = 3$

$p_{act} = (a+b) / 2 = (1.25+1.5) / 2 = 1.375$

$f(p_{act}) = (1.375)^3 + 4*(1.375)^2 - 10 = 0.1621$

$f(p_{act} = 1.375) = 0.1621$  ¿es=? 0 no

$$ERA = \frac{|1.375 - 1.25|}{|1.375|} 0.0909$$

no es menor que  $\xi$

Signo( $f_{p_{act}} = 0.1621$ ) ¿es=? signo( $f(a) = -1.7968$ ) no

$a = 1.25$

$b = p_{act} = 1.375$

$p_{ant} = p_{act} = 1.375$

$Itera = Itera + 1 = 3 + 1 = 4$

$p_{act} = (a+b) / 2 = 1.3125$

$f(p_{act}) = (1.3125)^3 + 4*(1.3125)^2 - 10 = -0.8483$

$f(p_{act} = 1.3125) = -0.8483$  ¿es=? -0.8483 ¿es=? 0 no

$$ERA = \frac{|1.3125 - 1.375|}{|1.3125|} 0.0476$$

no es menor que  $\xi$

Signo( $f_{p_{act}} = -0.8483$ ) ¿es=? signo( $f(a) = -1.7968$ ) si

$a = p_{act} = 1.3125$

$b = 1.375$

$p_{ant} = p_{act} = 1.3125$

$Itera = Itera + 1 = 4 + 1 = 5$

$p_{act} = (a+b) / 2 = 1.3437$

$f(p_{act}) = (1.3437)^3 + 4*(1.3437)^2 - 10 = -0.3515$

$f(p_{act} = 1.3437) = -0.3515$  ¿es=? 0 no

$$ERA = \frac{|1.3437 - 1.3125|}{|1.3437|} = 0.0232$$

no es menor que  $\xi$

Signo( $f_{p_{act}} = -0.3515$ ) ¿es=? signo( $f(a) = -0.8483$ ) si



$$a = p_{\text{act}} = 1.3437$$

$$b = 1.375$$

$$p_{\text{ant}} = p_{\text{act}} = 1.3437$$

$$\text{Itera} = \text{Itera} + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$p_{\text{act}} = \left( \frac{a + b}{2} \right) = \frac{1.3437 + 1.375}{2} = 1.3593$$

$$f(p_{\text{act}}) = (1.3593)^3 + 4*(1.3593)^2 - 10 = -0.09736$$

$$f(p_{\text{act}}) = -0.09736 \text{ ¿es } =? 0 \text{ no}$$

$$\text{ERA} = \frac{|1.3671 - 1.3593|}{|1.3671|} = 0.01147$$

no es menor que  $\xi$

$$\text{Signo}(f(p_{\text{act}})) = -0.097 \text{ ¿es } =? \text{ signo}(f(a) = 1.3437) = -0.3515 \text{ si}$$

$$a = p_{\text{act}} = 1.3593$$

$$b = 1.375$$

$$p_{\text{ant}} = p_{\text{act}} = 1.3593$$

$$p_{\text{act}} = (a + b) / 2 = (1.3593 + 1.375) / 2 = 1.3671$$

$$f(p_{\text{act}}) = (1.3671)^3 + 4*(1.3671)^2 - 10 = 0.03118$$

$$f(p_{\text{act}}) = 0.03118 \text{ ¿es } =? 0 \text{ no}$$

$$\text{ERA} = \frac{|1.3671 - 1.3593|}{|1.3671|} = 0.0057 < \xi$$

si

Encontrado = True y la raíz:

**Raíz = 1.3671**

En resumen:

n	an	bn	pn	f(pn)
1	1	2	1.5	2.375
2	1	1.5	1.25	-1.7068
3	1.25	1.5	1.375	0.16214
4	1.25	1.375	1.3125	-0.8483
5	1.3125	1.375	1.343	-0.333
6	1.343	1.375	1.359	-0.102
7	1.359	1.375	1.367	0.029
8	1.359	1.367	1.363	-0.036
9	1.363	1.367	1.365	-0.0037
10	1.365	1.367	1.366	-
11	1.365	1.366	1.3655	0.0044
12	1.365	1.3655	1.36525	0.0003
13	1.365	1.36525	1.36515	-0.0021

14

1.36515

1.36525

1.36517

-0.0009

A continuación se presentan los procedimientos y funciones requeridos para implementar el problema en Turbo Pascal.

Procedure Bisección Sucesivos (a,b;real);

Var

Begin

    If  $f(a)*f(b) < 0$

    Then

    Begin

        p\_ant := maxInt ;

        Itera := 1;

$\xi := 0.001$ ;

        maxItera:=10;

        Encontrado := False;

        Repeat

            p\_act := (a+b) / 2;

            fp\_act := f(p\_act);

            If fp\_act = 0

            Then

                Encontrado := true

            Else

                If  $ERA(p\_act, p\_ant) < \xi$

            Then

                Encontrado := true

            Else

            Begin

                If  $signof(fp\_act)=signof(f(a))$

                Then

                    a:= p\_act

                Else

                    b:= p\_act

                    p\_ant := p\_act ;

            End;

        Itera := Itera+1

        Until (Itera > maxItera) or Encontrado

        Writeln ('Raíz = ',p\_act : 0 : 4)

    End

    Else

        Writeln ('No hay raíz');

        Readln

End;

Function Signof(Num:real):shortint;



```

Begin
  If Num >= 0
  Then
    Signof:= 1
  Else
    Signof:=-1
End;

```

```

Function ERA(p_act,p_ant:Real):real;
Begin
  ERA:= Abs(p_act-p_ant)/Abs(p_act)
End;

```

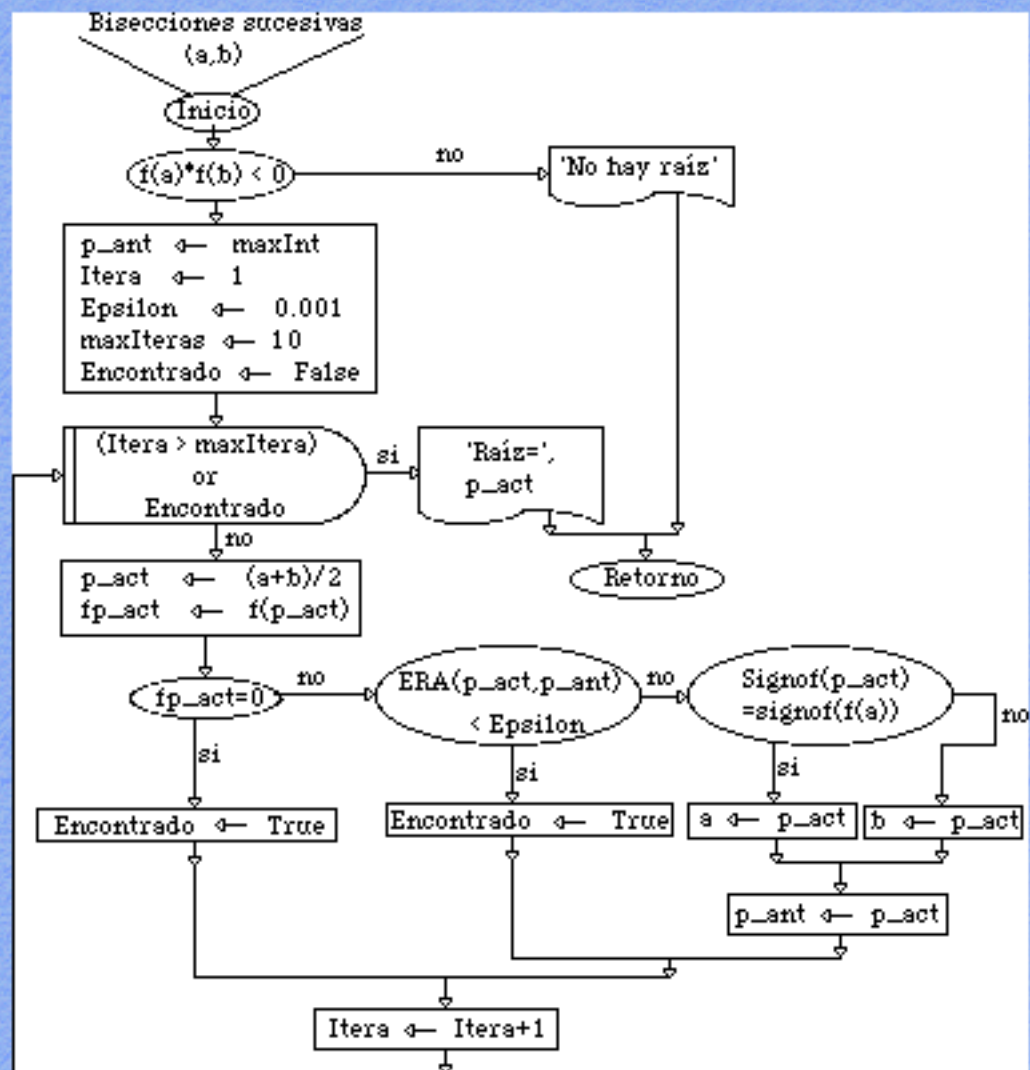


Figura 3.4.- Diagramas de flujo de bisecciones sucesivas

[Regreso a la página principal](#)

### 3.1.2 Fórmula para determinar el número de bisecciones necesarias para cierto intervalo.

$$|p_N - p| \leq \frac{b-a}{2^N}$$

Donde b y a (ver figura 3.3) son las cotas entre las cuales se desea encontrar la raíz.

$N = \#$  de bisecciones.

$|p_N - p|$  es el error absoluto permitido

Por ejemplo: Hagamos referencia al ejemplo anterior donde  $b=2$ ,  $a=1$  y  $|p_N - p| = 10^{-4}$

$$10^{-4} \leq (2-1)/2^N$$

$$10^{-4} \leq 1/2^N$$

$$10^{-4} \leq 2^{-N}$$

Resolviendo con logaritmos:

$$-4 \log_{10} \leq -N \log_{10} 2$$

$$-4 \leq -N \log_{10} 2$$

Despejamos a N

$$\frac{4}{\log_{10} 2} \leq N$$

$\therefore N \geq 13.28$  Iteraciones o bisecciones.

[Regreso a la página principal](#)

---

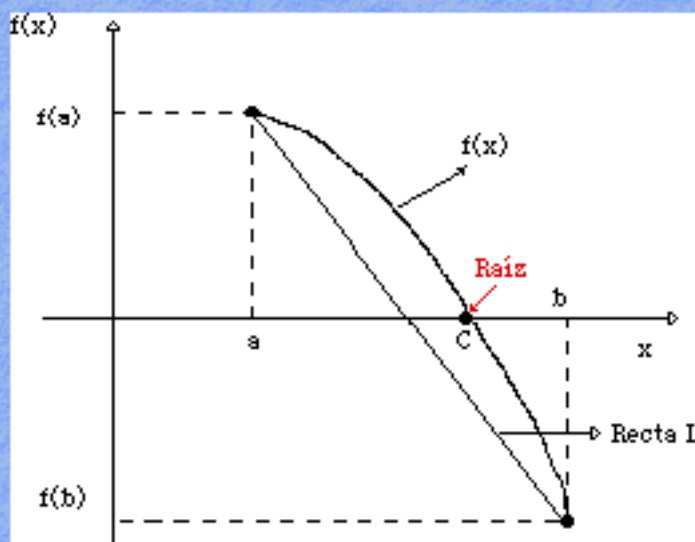


## 3.2 INTERPOLACION LINEAL INVERSA O FALSA

### POSICION Y METODO DE LA SECANTE

#### 3.2.1 Método de la Interpolación Lineal Inversa o Método de la falsa posición.

Se trata de encontrar la raíz de una ecuación. La ecuación tiene la forma  $f(x)$ , es decir, es una función de  $x$ . Además,  $f(x)$  esta definida en el intervalo  $[a,b]$ .



**Figura 3.5.- Intervalo de  $f(x)$ .**

El método de la interpolación lineal inversa, requiere varias condiciones:

1.-  $f(a) \cdot f(b) < 0$

Es decir, que el producto de la función de  $x$ ,  $f(x)$ , evaluada en  $a$ ,  $f(a)$ , multiplicada por la función de  $x$ ,  $f(x)$ , evaluada en  $b$ ,  $f(b)$ , sea negativo (menor a cero).

2.- Que la función  $f(x)$  se aproxime por otra función  $L(x)$ .

$f(x)$  es aproximadamente igual a  $L(x)$

Donde  $L(x)$  es:

$$L(x) = f(a) + (x-a) \cdot S$$

Donde:  $S$  = Pendiente

$$S = [f(b) - f(a)] / (b - a)$$

$$\therefore L(x) = f(a) + (x-a) \cdot [(f(b) - f(a)) / (b - a)]$$

De lo que en realidad se trata es de que  $L(x)$  sea igual a cero para cuando  $x$  sea igual a la raíz que se busca, o sea cuando  $x=C$ .  $L(x)=L(C)=0$

$$L(x) = L(c) = 0$$

$$\therefore L(x) = 0 = f(a) + (x - a) \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right]$$

$$(x - a) \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] = -f(a)$$

$$(x - a) = \frac{-f(a)}{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}} = \frac{-f(a)[b - a]}{f(b) - f(a)} = \frac{-bf(a) + af(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$x = a + \frac{-bf(a) + af(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{a[f(b) - f(a)] - bf(a) + af(a)}{f(b) - f(a)} =$$

$$= \frac{af(b) - af(a) - bf(a) + af(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Sin embargo como hicimos  $L(x)=0$  para cuando  $x=C$ , es decir cuando  $x$  sea igual a la raíz que se anda buscando, entonces la ecuación de arriba se debe de escribir como:

$$c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \text{ donde } C \text{ es la raíz que se anda buscando}$$

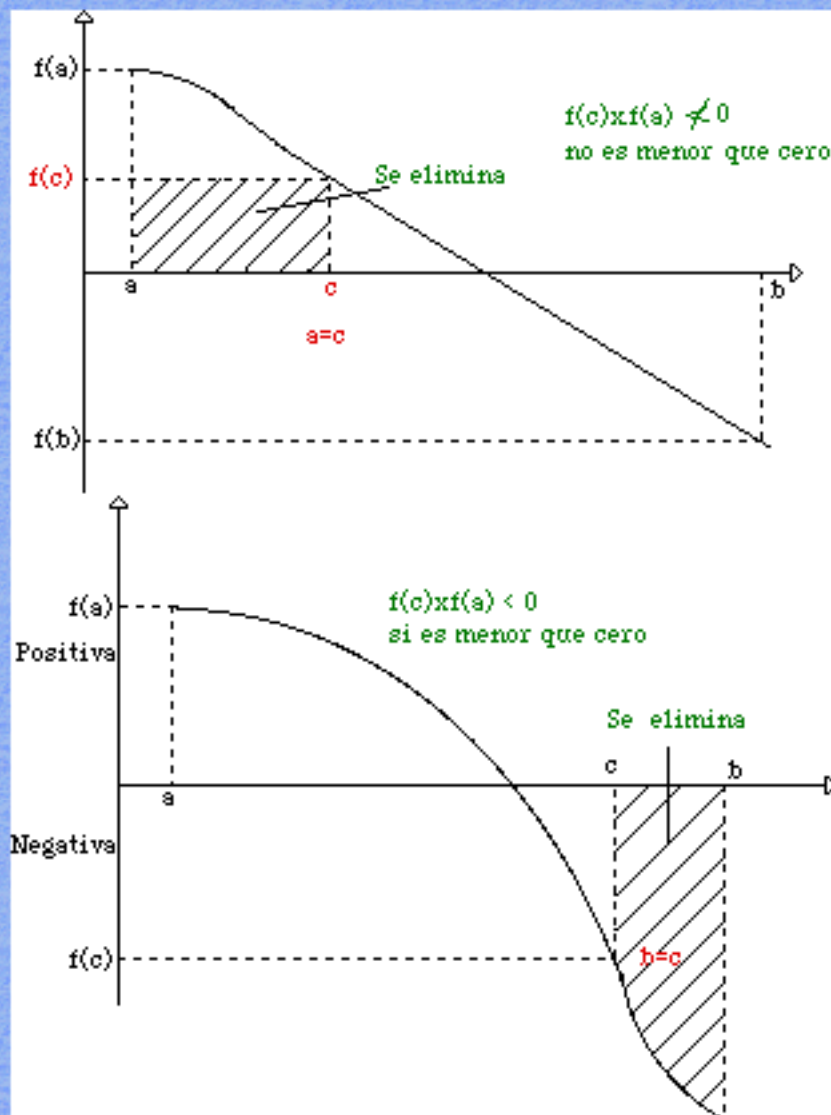
Después se calcula  $f(C)$  para ver su valor. Si se obtiene cero, no se debe avanzar más, pero en caso de no ser así, se realiza lo siguiente:

Se calcula  $f(C)*f(a)$  si este producto es menor a cero (negativo), entonces ahora  $C$  equivaldrá a  $b$ , y se repite el cálculo para encontrar una nueva  $C$ .

En el caso de que  $f(C)*f(b)$  sea la que haya dado el producto menor a cero, o sea negativo, entonces ahora  $a$  equivaldrá a  $c$ , y se repite el cálculo para encontrar una nueva  $C$ .

A este método, se le conoce como: Método de la falsa posición.





**Figura 3.6.- Multiplicación de funciones.**

Ejercicio:

Encontrar la raíz de  $f(x) = \cos x$  por el método de la falsa posición en el intervalo  $[1, 2]$  y  $\xi = 0.001$ .

Solución:

$a=1$ ,  $b=2$

$f(a=1) = \cos 1 = 0.5403$

$f(b=2) = \cos 2 = -0.4161$

$f(a) \cdot f(b) < 0$

$(0.5403) \cdot (-0.4161) < 0$  si ? hay raíz

$C_{\text{ant}} = 99999$  para arrancar

Itera=0

$\xi = 0.001$

Encontrado= False

$f_a = f(a=1) = 0.5403$

$$fb=f(b=2)=-0.4161$$

$$C_{act} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1(-0.4161) - 2(0.5403)}{-0.4161 - 0.5403} = 1.5649$$

$$f_c=f(C_{act}=1.5649)=\cos(1.5649)=0.005896$$

$$f(C_{act})=0.005896 \text{ ¿no es igual a 0? no}$$

$$ERA(C_{act}=1.5649, C_{ant}=99999)=1.5649 - 99999 / 1.5649 \text{ ? no es menor a } \xi$$

$$fC*f(a) < 0$$

$$(0.005896)*(0.5403) \text{ ? es diferente a cero } \therefore$$

$$a = C_{act} = 1.5649$$

$$b = 2$$

$$\text{Itera} = 1$$

$$C_{ant} \leftarrow C_{act} = 1.5649$$


---

$$fa=f(a=1.5649)=0.005896$$

$$fb=f(b=2)=-0.4161$$

$$C_{act} = \frac{1.5649(-0.4161) - 2(0.005896)}{-0.4161 - 0.005896} = 1.5709$$

$$f(C_{act}=1.5709)=\cos(1.5709)=-0.0001036$$

$$f(C)=-0.0001036 \text{ no es igual a 0}$$

$$ERA(C_{act}=1.5709, C_{ant}=1.5649)=(1.5709 - 1.5649) / 1.5709 = 0.0038194 \text{ ? no es menor a } \xi$$

$$fC*f(a) < 0$$

$$(-0.0001036)*(0.005896) \text{ ? sí es menor a cero } \therefore$$

$$a = a = 1.5649$$

$$b = C_{act} = 1.5709$$

$$\text{Itera} = 2$$

$$C_{ant} = 1.5709$$


---

$$f(a=1.5649)=0.005896$$

$$f(b=1.5709)=\cos 1.5709 = -0.0001036$$

$$C_{act} = \frac{1.5649(-0.0001036) - 1.5709(0.005896)}{-0.0001036 - 0.005896} = 1.5707$$

$$f(C_{act}=1.5707)=\cos(1.5707)=-0.00000006629$$

$$f(C_{act})*f(a) \text{ ¿ es igual? no}$$

$$ERA(C = 1.5707, C_{ant} = 1.5709) = \left| \frac{1.5707 - 1.5709}{1.5707} \right| = 1.27 \times 10^{-4} = 0.000127 < 0.001(\text{sí})$$

Raíz =

$$1.5707$$

Tarea:

1) Sea  $f(x)=x^2-6$  con  $[2,3]$  encontrar la raíz por el método de la falsa posición con  $\xi=0.001$ .

$$R=2.45454$$



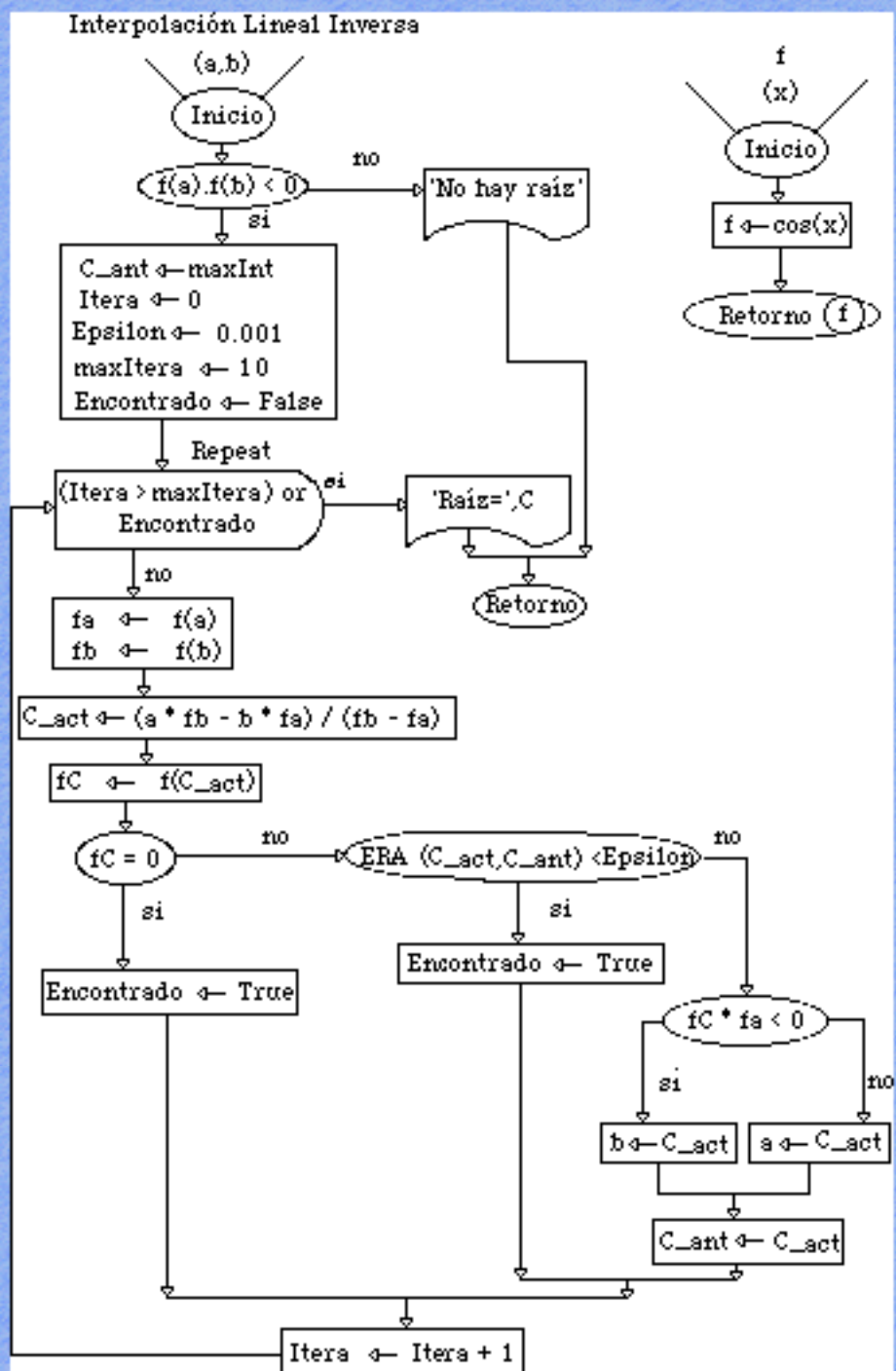


Figura 3.7.- Diagramas de flujo de la Interpolación lineal inversa

[Regreso a la página principal.](#)

### 3.2.2 Método de la secante

$$x_{j+2} = \frac{x_j f(x_{j+1}) - x_{j+1} f(x_j)}{f(x_{j+1}) - f(x_j)}$$

Donde  $j$  = representa el número de iteraciones

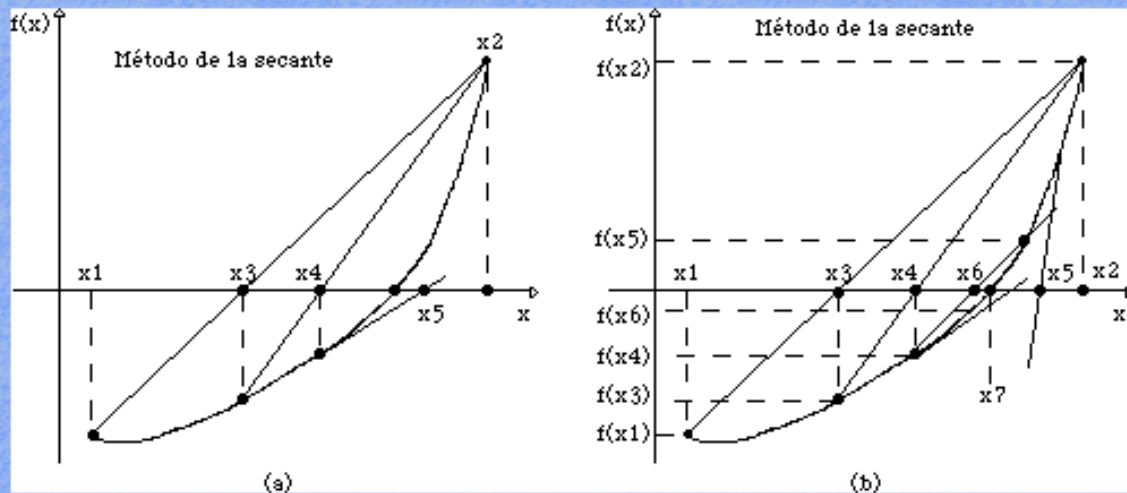


Figura 3.8.- Método de la secante

Ejemplo:

Calcular la raíz por el método de la secante de  $f(x) = \cos x - x$  dentro del intervalo de 0 a 1 con  $\xi = 0.001$ . Para aplicar este método, se supone desde luego que debe de existir una raíz dentro del intervalo planteado por el problema.

Para usar el método de la secante, se toma como  $x_1$  el límite inferior y como  $x_2$  el límite superior.  $x_3$  será el primer valor calculado por el método de la secante.

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$x_3$  = Primer valor calculado por el método de la secante

Solución:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$f(x_1=0) * f(x_2=1) < 0 \text{ sí ? hay raíz}$$

Encontrado = False

$J=0$  (Itera)

$$\xi = 0.001$$

$$fx_1 = f(x_1=0) = \cos 0 - 0 = 1$$

$$fx_2 = f(x_2=1) = \cos 1 - 1 = -0.4596$$

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{0(-0.4596) - 1(1)}{-0.4596 - 1} = 0.6850$$

$$fx_3 = f(x_3=0.6850) = \cos 0.6850 - 0.6850 = 0.08937$$

$f(x_3)$  ¿es igual a cero? O no es igual a 0

$$\text{ERA}(x_3, x_2) < \xi$$

$$\left| \frac{0.08937 - 1}{0.08937} \right| = 10.18 > 0.001$$

$$x_1 \leftarrow x_2 = 1$$

$$x_2 \leftarrow x_3 = 0.6850$$

$$J \leftarrow J + 1 = 1$$

$$fx_1 = f(x_1=1) = -0.4596$$

$$fx_2 = f(x_2=0.685) = 0.08937$$

$$x_3 = \frac{1(0.08937) - 0.685(-0.4596)}{0.08937 - (-0.4596)} = 0.7362$$

$$fx_3 = f(x_3=0.7362) = \cos 0.7362 - 0.7362 = 0.004825$$

$f(x_3)$  ¿es igual a cero? O no es igual a 0

$$\text{ERA}(x_3=0.7362, x_2=0.6850) < \xi$$

$$\left| \frac{0.7362 - 0.685}{0.7362} \right| = 0.06966 > 0.001$$

$$x_1 \leftarrow x_2 = 0.6850$$

$$x_2 \leftarrow x_3 = 0.7362$$

$$J \leftarrow J + 1 = 2$$

$$fx_1 = f(x_1=0.6850) = 0.08937$$

$$fx_2 = f(x_2=0.7362) = 0.004825$$

$$x_3 = \frac{0.685(0.004825) - 0.7362(0.08937)}{0.004825 - 0.08937} = 0.7391$$

$$fx_3 = f(x_3=0.7391) = \cos 0.7391 - 0.7391 = -0.000024$$

$f(x_3)$  ¿es igual a cero? O no es igual a 0

$$\text{ERA}(x_3=0.7391, x_2=0.7362) \text{ no es menor a } \xi$$

$$\left| \frac{0.7391 - 0.7362}{0.7391} \right| = 0.003923 > 0.001$$

$$x_1 \leftarrow x_2 = 0.7362$$

$$x_2 \leftarrow x_3 = 0.7391$$

$$J \leftarrow J + 1 = 3$$

$$fx_1 = f(x_1=0.7362) = 0.004825$$

$$fx_2 = f(x_2=0.7391) = -0.000024$$

$$x_3 = \frac{0.7362(-0.000024) - 0.7391(0.004825)}{-0.000024 - 0.004825} = 0.7390$$

$$fx_3 = f(x_3=0.7390) = \cos 0.7390 - 0.7390 = 0.0001424$$



$f(x_3)$  ¿es igual a cero? O no es igual a 0

ERA ( $x_3=0.7390$ ,  $x_2=0.7391$ ) es menor a  $\xi$

$$\left| \frac{0.7390 - 0.7391}{0.7390} \right| = 1.3531 \times 10^{-4} = 0.00013531 < \xi \text{ si}$$

$\therefore$  Raíz = 0.7390

Tarea:

Ejercicios

1) Sea  $f(x) = x^2 - 6$  con  $x_0=3$  y  $x_1=2$  encuentre  $x_3$ . Aplicar el método de secante con  $\xi=0.001$ . (Raíz = 2.45454)

2) Sea  $f(x) = x^3 - \cos x$  con  $x_1=-1$  y  $x_2=0$  encontrar  $x_3$  con el método de la secante. Probar para  $J=1,2,3$  (3 iteraciones).

A continuación se presenta el procedimiento a seguir en Turbo Pascal.

Procedure Secante(  $x_1, x_2$  : real)

Var

J,maxItera:byte;

Epsilon,  $x_3$ , fx,  $fx_2$ ,  $fx_3$ :real;

Begin

If  $f(x_1)*f(x_2) < 0$

Then

Begin

Encontrado:= False;

J:= 0;

Epsilon := 0.001;

maxItera:=10;

Repeat

fx1 <--  $f(x_1)$ ;

fx2 <--  $f(x_2)$ ;

$x_3$  <--  $(x_1*f(x_2) - x_2*f(x_1) / (fx_2 - fx_1))$ ;

fx3 <--  $f(x_3)$

If  $fx_3=0$

Then

Encontrado := True

Else

If ERA ( $x_3, x_2$ ) < Epsilon

Then

Encontrado :=True

Else

Begin



```
        x1 <-- x2
        x2 <-- x3
    End;
Inc (J)
```

```
Until (J >maxItera) or Encontrado;
Writeln ('La raíz = ',x3)
```

```
End
```

```
Else
```

```
    Writeln('No hay raíz');
```

```
    Readln
```

```
End;
```

```
Function f(x : real): real
```

```
Begin
```

```
    f:= cos (x) + x
```

```
End;
```

[Regreso a la página principal.](#)

### 3.3 ITERACION O METODO ITERATIVO DE PUNTO FIJO

Este método sirve para encontrar las raíces de una ecuación y consiste en los siguientes pasos:

1.- Nos deben dar la función a la cual le debemos encontrar la raíz, es decir, debemos conocer  $f(x)=0$ .

Ejemplo:  $f(x)= 0.5*x - 4 = 0$

2.- Nos deben de dar un valor inicial  $x_0$ . Ejemplo  $x_0 = 0$ .

3.- De la función  $f(x)$  debemos de despejar  $x$  de manera que encontremos una nueva función de  $x$  llamada ahora  $g(x)$ .

Ejemplo:

$(2/2)*x - (1/2)*x - 4 = 0$  donde  $(1/2)*x$  no se altera

$x - (1/2)*x - 4 = 0$

$\therefore x = (1/2)*x + 4$

$g(x) = x = (1/2)*x + 4$

4.- Se deriva la función  $g(x)$ . En el caso de que el valor absoluto de la derivada de  $g(x)$  sea menor a uno, se asegura que el despeje realizado funcione.

$$g'(x) = \frac{1}{2} \frac{dx}{dx} + \frac{d(4)}{dx} = \frac{1}{2}; g'(x) = \frac{1}{2}; |g'(x)| < 1 \text{ si}$$

5.- Luego se evalúa  $g(x)$  utilizando primero  $x_0$ . El resultado de esta evaluación se convierte en el nuevo valor de  $x$  y así se continúa hasta encontrar la raíz deseada desde luego, satisfaciendo un error deseado.

Solución:

$x_0 = 0$  ,  $\xi = 0.001$

$x_1 = (x_0/2) + 4 = 0 + 4 = 4$

ERA  $(x_1, x_0)$   $\xi$

$x_2 = (x_1/2) + 4 = 6$

ERA  $(x_2, x_1)$   $\xi$

$x_3 = (x_2/2) + 4 = 7$

ERA  $(x_3, x_2)$   $\xi$

$x_4 = (x_3/2) + 4 = 7.5$

ERA  $(x_4 = 7.5, x_3 = 7)$

$$\left| \frac{7.5 - 7}{7.5} \right| = 0.066 > \xi \text{ (que no es menor a } \xi \text{)}$$

$x_5 = (x_4/2) + 4 = 7.75$

ERA  $(x_5, x_4)$   $\xi$

$x_6 = (x_5/2) + 4 = 7.875$



$$\text{ERA}(x_6, x_5) = \frac{|7.875 - 7.75|}{7.875} = 0.0158 > \xi \quad (\text{que no es menor a } \xi)$$

$$x_7 = (x_6/2) + 4 = 7.9375$$

$$\text{ERA}(x_7, x_6) \xi$$

$$x_8 = (x_7/2) + 4 = 7.96875$$

$$\text{ERA}(x_8, x_7) = \frac{|7.96875 - 7.9375|}{7.96875} = 0.0039 > \xi \quad (\text{que no es menor a } \xi)$$

$$x_9 = (x_8/2) + 4 = 7.984375$$

$$\text{ERA}(x_9, x_8) = \frac{|7.984375 - 7.96875|}{7.984375} = 0.0019 > \xi \quad (\text{que no es menor a } \xi)$$

$$x_{10} = (x_9/2) + 4 = 7.9921875$$

$$\text{ERA}(x_{10}, x_9) = \boxed{\phantom{0.0009}}$$

$$\therefore \text{Raíz} = x_{10} = 7.9921875 \text{ (tiende a 8)}$$

El número 7.9921 se le llama punto fijo de  $g(x)$ , sin importar cual sea el  $x_0$ . El punto fijo de  $g(x)$  es la raíz de  $f(x)$ .

Ejemplo :

Sea  $f(x) = x + 4 = 0$  y  $x_0 = 0$  Encontrar una raíz por el método iterativo del punto fijo.

Hagamos un posible despeje:

$$2x - x + 4 = 0$$

$$x = 2x + 4 \therefore g(x) = 2x + 4$$

$g'(x) = 2$  donde  $g'(x)$  no es menor a 1, por lo tanto, no se asegura que este despeje sirva:

Probemos:

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 2(0) + 4 = 4$$

$$x_2 = 2(4) + 4 = 12$$

$$x_3 = 2(12) + 4 = 28$$

$$x_4 = 2(28) + 4 = 60$$

$x$  tiende al infinito de manera tal que no vamos a encontrar ninguna raíz, desde luego comenzando con  $x_0 = 0$ .

Al analizar  $f(x) = x + 4 = 0$ . Vemos que la solución es  $x + 4 = 0 \therefore x = -4$ .

Y desde luego, si iniciáramos con la solución, es decir, que  $x_0 = -4$ , si tenderíamos a encontrar la solución. Sin embargo, el método trata de que dado un valor inicial que no sea la solución, se encuentre la solución.

$$x_0 = -4; x_1 = 2(-4) + 4 \therefore x_1 = -4$$

$$\text{Sea } f(x) = x + 4 = 0 \text{ con } x_0 = 0$$

$$2x - x + 4 = 0 \text{ ? } x = 2x + 4 \therefore g(x) = 2x + 4$$

$g'(x) = 2$  que es mayor a 1  $\therefore g'(x)$  no es menor que 1 y por lo tanto no se asegura que este despeje sirva.

Probemos

$$\text{Con } x_0 = 0$$



$$x_1 = 2 * x_0 + 4 = 2 * (0) + 4 = 4$$

$$x_2 = 2 * x_1 + 4 = 2 * (4) + 4 = 12$$

$$x_3 = 2 * x_2 + 4 = 2 * (12) + 4 = 28$$

$$x_4 = 2 * x_3 + 4 = 2 * (28) + 4 = 60$$

x tiende al infinito de manera tal que no vamos a encontrar ninguna raíz.

Intentemos otro despeje:

$$f(x) = x + 4 = 0$$

se despeja con respecto a  $(3/2)x$

$$(3/2)*x - (1/2)*x + 4 = 0$$

$$(3/2)*x = (1/2)*x - 4$$

$$x = (2/3)*(1/2)*x - (2/3)*(4) = (1/3)*x - (8/3)$$

$$\therefore g(x) = (1/3)*x - (8/3)$$

$$|g'(x)| = \frac{1}{3}; |g'(x)| < 1$$

checando que  $(1/3) < 1$  se asegura que el despeje realizado si sirve.

Probemos con  $x_0 = 0$   $x_{\text{ant}} = x_0 = 0$

$$x_{\text{act}} = (x_{\text{ant}} / 3) - 2.66 = 0 - 2.66 = -2.66$$

ERA ( $x_{\text{act}} = -2.66$ ,  $x_{\text{ant}} = 0$ )

$$\left| \frac{-2.66 - 0}{-2.66} \right| = 1 > \xi$$

$$x_{\text{ant}} = x_{\text{act}} = -2.66$$

Itera=1

$$x_{\text{act}} = (-2.66 / 3) - 2.66 = -3.5466$$

ERA ( $x_{\text{act}} = -3.5466$ ,  $x_{\text{ant}} = -2.66$ )

$$\left| \frac{-3.5466 - (-2.66)}{-3.5466} \right| = 0.2500 > \xi \quad (\text{que no es menor a } \xi)$$

$$x_{\text{ant}} = x_{\text{act}} = -3.5466$$

Itera=2

$$x_{\text{act}} = (-3.5466 / 3) - 2.66 = -3.8422$$

ERA ( $x_{\text{act}} = -3.8422$ ,  $x_{\text{ant}} = -3.5466$ )

$$\left| \frac{-3.8422 - (-3.5466)}{-3.8422} \right| = 0.07693 > \xi \quad (\text{que no es menor a } \xi)$$

$$x_{\text{ant}} = x_{\text{act}} = -3.8422$$

Itera=3

$$x_{\text{act}} = (-3.8422 / 3) - 2.66 = -3.9407$$

ERA ( $x_{\text{act}} = -3.9407$ ,  $x_{\text{ant}} = -3.8422$ )

$$\left| \frac{-3.9407 - (-3.8422)}{-3.9407} \right| = 0.025 > \xi \quad (\text{que no es menor a } \xi)$$

$$x_{\text{ant}} = x_{\text{act}} = -3.9407$$

Itera=4

---

$$x_{\text{act}} = (-3.9407/3) - 2.66 = -3.9735$$

ERA ( $x_{\text{act}} = -3.9735, x_{\text{ant}} = -3.9407$ )

$$\left| \frac{-3.9735 - (-3.9407)}{-3.9735} \right| = 0.0082 > \xi \quad (\text{que no es menor a } \xi)$$

$$x_{\text{ant}} = x_{\text{act}} = -3.9735$$

Itera=5

---

$$x_{\text{act}} = (-3.9735/3) - 2.66 = -3.9845$$

ERA ( $x_{\text{act}} = -3.9845, x_{\text{ant}} = -3.9735$ )

$$\left| \frac{-3.9845 - (-3.9735)}{-3.9845} \right| = 0.00276 > \xi \quad (\text{que no es menor a } \xi)$$

$$x_{\text{ant}} = x_{\text{act}} = -3.9845$$

Itera=6

---

$$x_{\text{act}} = (-3.9845/3) - 2.66 = -3.9881$$

ERA ( $x_{\text{act}} = -3.9881, x_{\text{ant}} = -3.9845$ )

$$\left| \frac{-3.9881 - (-3.9845)}{-3.9881} \right| = 0.00090 < \xi \quad (\text{que si es menor a } \xi)$$

$\therefore$  Raíz = -3.9881

Esto tiende al número -4. Al número -4 se le llama punto fijo de  $g(x)$ , sin importar cual sea el  $x_0$ . El punto fijo de  $g(x)$  es la raíz de  $f(x)$ .

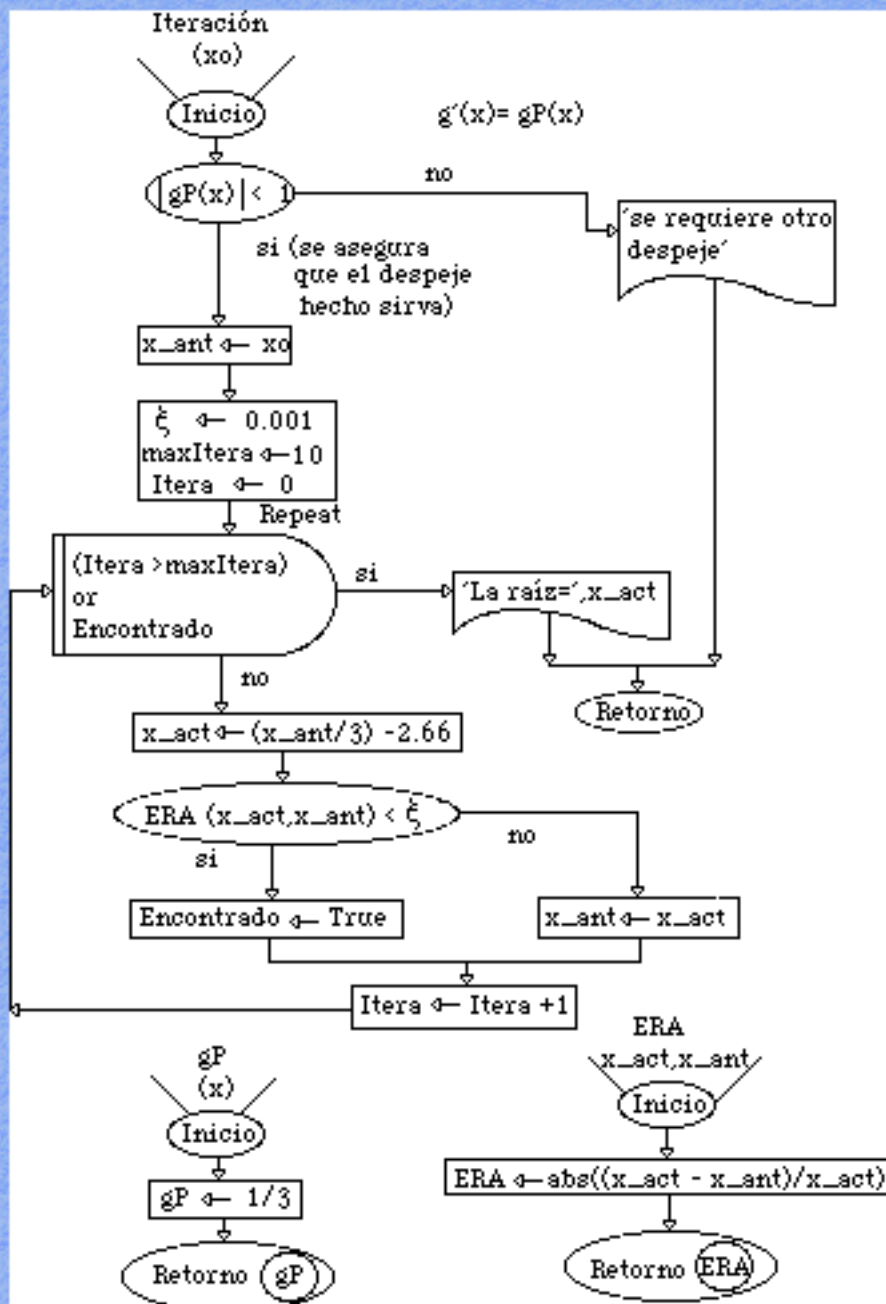


Figura 3.9.- Diagramas de flujo del método de iteración.

Ejemplo:

Encontrar una raíz por el método iterativo del punto fijo.

Solución:

$f(x) = x \cdot e^x - 1 = 0$  empezar con  $x_0 = 0$  y un Epsilon = 0.001

$$x \cdot e^x = 1$$

$$x = 1 / e^x$$

$$x = e^{-x}$$

$$g(x) = e^{-x}$$

$$g'(x) = e^{-x} \cdot [-1] = -e^{-x}$$

si se cumple



Para  $x=0 \Rightarrow |-e^{-0}| = 1$  que no es menor que 1  $\therefore$  no se cumple

Por lo tanto vemos que pasa con  $x>0$  y  $x<0$ :

$$\text{para } x > 0 \Rightarrow |-e^{-x}| < 1 (\text{si se cumple})$$

$$g'(x) = -e^{-x} \quad \text{para } x < 0 \Rightarrow |-e^{-x}| > 1$$

Por ejemplo para:

$$x=10 \quad |-e^{-x}| = 4.53 \cdot 10^{-5} < 1 \therefore \text{si se cumple}$$

$$|g'(x)| = |-4.53 \cdot 10^{-5}| < 1$$

$$x = -10 \rightarrow e^{-x} = 22026.46$$

$$|g'(x)| = |-22026.46| \text{ no es menor a uno. } \therefore \text{no se cumple.}$$

Esto asegura que el despeje hecho si funciona para valores de  $x_0$ .

Probemos:

Dado que  $x_0=0 \therefore$  se debe empezar con otro valor como  $x_0=0.1$  ó  $x_0=1$  y con la ecuación iterativa

$$x_{\text{act}} = e^{-x_{\text{ant}}}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = e^{-1} = 0.367879441171$$

$$x_3 = e^{-x_2} = 0.692200627556$$

$$x_4 = e^{-x_3} = 0.500473500563$$

$$x_5 = e^{-x_4} = 0.606243535086$$

$$x_6 = e^{-x_5} = 0.545395785975$$

$$x_7 = e^{-x_6} = 0.579612335503$$

$$x_8 = e^{-x_7} = 0.560115461361$$

$$x_9 = e^{-x_8} = 0.57114311508$$

$$x_{10} = e^{-x_9} = 0.564879347391$$

$$x_{11} = e^{-x_{10}} = 0.568428725029$$

$$x_{12} = e^{-x_{11}} = 0.566414733147$$

$$x_{13} = e^{-x_{12}} = 0.567556637328$$

$$x_{14} = e^{-x_{13}} = 0.566908911922$$

$$x_{15} = e^{-x_{14}} = 0.567276232175$$

$$ERA = \left| \frac{0.567276232175 - 0.566708911922}{0.567276232175} \right| = 0.0006475 < \xi = 0.001 (\text{si})$$

Esto tiende a converger al número 0.5673 Al número 0.567276232175 se le llama punto fijo de  $g(x)$ , sin importar cual sea el  $x_0$ . El punto fijo de  $g(x)$  es la raíz de  $f(x)$ .

Tarea:

- 1.-Encontrar la raíz de  $f(x) = e^x - 3 \cdot x = 0$  que se encuentra en  $[1.4, 1.5]$  usando  $x_0 = 1.5$  por el método iterativo del punto fijo.
- 2.- Encontrar la raíz de  $f(x) = x^5 + x^2 = 9$  que se encuentra en  $[1.4, 1.5]$  usando  $x_0 = 1.5$  por el método Iterativo del punto fijo.

[Regreso a la página principal.](#)

## 3.4 ITERACION: CONVERGENCIA

Criterios de convergencia para detener las iteraciones.

Optimista

Todos los criterios optimistas están referidos a un valor determinado para un error permitido (error).

EA=Error absoluto y ERA=Error relativo aproximado, donde  $\text{Error}=\xi$ .

$$\begin{aligned}
 1) & \text{EA} = |x_{j+1} - x_j| < \text{Error} \\
 2) & \text{ERA} = \left| \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1}} \right| < \text{Error} \\
 3) & \left| \frac{x_{j+1} - x_j}{x_j} \right| < \text{Error} \\
 4) & \left| \frac{x_{j+1} - x_j}{x_1} \right| < \text{Error} \\
 5) & |f(x_j)| < \text{Error} \\
 6) & |f(x_{j+1}) - f(x_j)| < \text{Error} \\
 7) & \left| \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{f(x_j)} \right| < \text{Error} \\
 8) & \left| \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{f(x_1)} \right| < \text{Error}
 \end{aligned}$$

Pesimista

Todos los criterios pesimistas hacen detener las iteraciones llegando a la conclusión de que no se alcanzó la convergencia.



$$9) j > M$$

$$10) |x_j - x_1| > M$$

$$11) |f(x_j)| > M$$

$$12) |f(x_j) - f(x_1)| > M$$

$$13) \left| \frac{f(x_j)}{f(x_1)} \right| > M$$

[Regreso a la página principal.](#)

## 3.5 ITERACION RAZON DE CONVERGENCIA

Este tema tiene que ver con todo lo mencionado anteriormente para iteración (3.3 y 3.4). Sin embargo, hace énfasis en evaluar la derivada de la función  $g(x)$  para ver si el despeje realizado nos va a servir o no nos va a servir.

Por ejemplo:

Encontrar la raíz de  $f(x)=x^2-x-6=0$  usando el método iterativo del punto fijo. Es importante analizar porque algunas formas equivalentes  $x=g(x)$  de  $f(x)=0$  conducen a una raíz en el método de punto fijo y otros no, aún empleando el mismo valor inicial en ambos casos.

Un método práctico de emplear este resultado es obtener distintas formas  $x=g(x)$  de  $f(x)=0$  y

calcular  $|g'(x)|$  las que satisfacen el criterio  $|g'(x)| < 1$  prometerán convergencia.

Aquí no nos dan de inicio el valor de  $x_0$ .

1ro.- Encontraremos la función  $g(x)$ ,

Despejemos con respecto a  $x^2$ :

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x^2 = x + 6$$

$$x = (x + 6)^{1/2}$$

$$g(x) = x = (x + 6)^{1/2}$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d}{dx} (x + 6)^{1/2} = \frac{1}{2} (x + 6)^{1/2 - 2/2} \left( \frac{d(x + 6)}{dx} \right)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} (x + 6)^{-1/2} (1 + 0)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} (x + 6)^{-1/2}$$

Ahora nos preguntamos si  $\Rightarrow |g'(x)| < 1$ , así que sustituimos la  $g'(x)$  y queda:

$$\left| \frac{1}{2} (x + 6)^{-1/2} \right| < 1$$

$$(1/2) * (x + 6)^{-1/2} < 1$$

$$(1/2) < (x + 6)^{1/2}$$

$$\left( \frac{1}{2} \right)^2 < [(x + 6)^{-1/2}]^2$$

$$(1/4) < x + 6$$

$$x + 6 > (1/4)$$

$$x > (1/4) - 6$$

$$x > -5.75$$

Esto lo que quiere decir es que para que encontremos un punto fijo de  $g(x)$  y por lo tanto una raíz de  $f(x)$ , el valor buscado va a ser mayor de -5.75. Debido a esto, podemos iniciar nuestro proceso



iterativo con un valor de  $x_0$  mayor a -5.75. Probando dos casos, uno en el cual  $x_0$  sea igual a 3 y el segundo en el que  $x_0$  sea igual a 0.

Probemos primero con  $x_0=3$

$$x_0=3$$

$$x_1=(x_0+6)^{1/2}=(3+6)^{1/2}=3$$

$$x_2=(x_1+6)^{1/2}=(3+6)^{1/2}=3$$

$$\text{ERA}=\left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| = 0 < \epsilon^2 \quad \text{si}$$

$\therefore$  Por lo tanto, 3 es un punto fijo de  $g(x)$  y es una raíz de  $f(x)$ .

Probemos ahora con  $x_0=0$  el cual cumple que sea mayor a -5.75.

$$x_0=0$$

$$x_1=(x_0+6)^{1/2}=2.44948974278$$

$$x_2=(x_1+6)^{1/2}=2.90680060251$$

$$x_3=(x_2+6)^{1/2}=2.98442634396$$

$$x_4=(x_3+6)^{1/2}=2.99740326682$$

$$x_5=(x_4+6)^{1/2}=2.99956717991$$

$$x_6=(x_5+6)^{1/2}=2.99992786245$$

$$x_7=(x_6+6)^{1/2}=2.99998797705$$

tiende al número 3. Por lo tanto 3 es un punto fijo de  $g(x)$  y es una raíz de  $f(x)$ .

Conclusión de este ejemplo, es que independientemente del valor inicial de  $x_0$ , llegamos al mismo resultado siempre y cuando  $x_0 > -5.75$ .

Ejercicio:

Encontrar una raíz para  $f(x)=5x^2-4x-7$  por el método iterativo del punto fijo dentro del intervalo  $(-0.9, -0.8)$ .

Solución:

Propongamos primero una función  $g(x)$

$$5x^2-4x=7$$

factorizando a  $x$  y trabajando con respecto a la  $x$  que se factorizó:

$$x(5x-4)=7 \text{ y despejando a } x$$

$$x = 7 / (5x - 4)$$

$$g(x)=7 / (5x - 4)$$

$$dg(x) / dx = d/dx(7 / (5x-4)) = (d/dx)(7*(5x-4)^{-1})$$

$$g'(x)=7*[(-1)*(5x-4)^{-1-1}((d/dx)(5x-4))]$$

$$g'(x)=7[(-1)(5x-4)^{-2}(5-0)]$$

$$g'(x)=(7*(-1)*(5)) / (5x-4)^2 = -35 / (5x-4)^2 \quad |g'(x)| < 1$$

Probemos para los límites del intervalo dado para -0.9.



$$|g'(-0.9)| = \left| \frac{-35}{(5(-0.9) - 4)^2} \right| = |-0.484| = 0.484$$

$$|g'(-0.9)| = 0.484 < 1(\text{sí})$$

Ahora probemos para -0.8.

$$|g'(-0.8)| = \left| \frac{-35}{(5(-0.8) - 4)^2} \right| = |-0.54| = 0.54$$

$$|g'(-0.8)| = 0.54 < 1(\text{sí})$$

Por lo tanto el despeje propuesto, es decir  $g(x)$  si nos sirve.

Encontremos el punto fijo de  $g(x)$  es decir la raíz de  $f(x)$ . Además de percatarnos que no es necesario un intervalo sino un solo valor de arranque, por lo que se trabajará con el valor inicial de  $x_0 = -0.85$  el cual se encuentra dentro del intervalo  $(-0.9, -0.8)$ .

$$x_0 = -0.85$$

$$x_1 = 7 / (5 * x_0 - 4) = -0.848484848486$$

$$x_2 = 7 / (5 * x_1 - 4) = -0.849264705882$$

$$x_3 = 7 / (5 * x_2 - 4) = -0.8488631129735$$

$$x_4 = 7 / (5 * x_3 - 4) = -0.849069868054$$

$$x_5 = 7 / (5 * x_4 - 4) = -0.848963423031$$

El valor tiende a -0.849 punto fijo de  $g(x)$  y raíz de  $f(x)$ .

Ejercicio:

Encontrar una raíz para  $f(x) = x^2 - x - 2$  por el método iterativo del punto fijo cuyas raíces son  $(-1, 2)$

Propongamos varias funciones de  $g(x)$  y veamos cuales de ellas si nos pueden servir:

1) respecto a la segunda

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x^2 - 2 = x$$

$$g_1(x) = x = x^2 - 2$$

2) respecto a  $x^2$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x^2 = 2 + x$$

$$x = \pm(2 + x)^{1/2}$$

$$2) g_2(x) = -(2 + x)^{1/2}$$

$$3) g_3(x) = (2 + x)^{1/2}$$

4) respecto a  $x^2$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x^2 = x + 2$$

se despeja con respecto a  $x * x$

$$x * x = x + 2$$

$$x = 1 + 2/x$$

$$g_4(x) = 1 + 2/x$$

5) factorizamos a  $x$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x*(x-1)-2=0$$

$$x*(x-1)=2$$

$$x=2 / (x-1)$$

$$g_5(x)=2 / (x-1)$$

Probemos si  $g_1(x)$  nos puede servir para encontrar las dos raíces (-1,2).

$$g_1(x)=x^2-2$$

$$g_1'(x)=2*x$$

$$|g_1'(x)| < 1$$

$$2*x < 1$$

$$x < 1 / 2$$

Esto quiere decir que el despeje propuesto nos va a servir para encontrar la raíz con  $x$  que sea una sola palabra sea menor a 0.5.

Probemos con  $x_0=0$

$$x_{Act}=x_{Ant}-2$$

$$x_1 = x_0^2 - 2$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = x_1^2 - 2 = (-2)^2 - 2 = 2$$

$$x_3 = (-2)^2 - 2 = 2$$

$\therefore 2$  es el punto fijo de  $g(x)$  y es la raíz de  $f(x)$ .

Como sabemos que una raíz es 2 veamos si 1.5 lo aproxima:

Probemos con  $x_0=1.5$

$$x_1 = (1.5)^2 - 2$$

$$x_1 = 0.25$$

$$x_2 = x_1^2 - 2 = -1.9375$$

$$x_3 = x_2^2 - 2 = 1.75390625$$

$$x_4 = x_3^2 - 2 = 1.0768713379$$

No tiende a alguna convergencia. Esto demuestra que debe respetarse que  $x < (1/2)$  para esta ecuación iterativa.

Probemos ahora  $g_2(x)$

$$g_2(x) = -(2+x)^{1/2}$$

$$g_2^1(x) = -(1/2) * (2+x)^{-1/2}$$

$$|g_2'(x)| = \left| -\frac{1}{2}(2+x)^{-1/2} \right| < 1$$

$$\left| -\frac{1}{2}(2+x)^{-1/2} \right| < 1$$

$$(1/2) * (2+x)^{-1/2} < 1$$

$(2+x)^{1/2}$  esta dividiendo y pasa multiplicando:

$$1 / (2 * (2+x)^{1/2}) < 1$$

$$1/2 < (2+x)^{1/2}$$

elevo al cuadrado y reacomodo para despejar a  $x$ :



$$\begin{aligned}
 2+x &> 1/4 \\
 x &> 1/4 - 2 \\
 x &> 1/4 - 8/4 \\
 x &> -7/4 \\
 x &> -1.75
 \end{aligned}$$

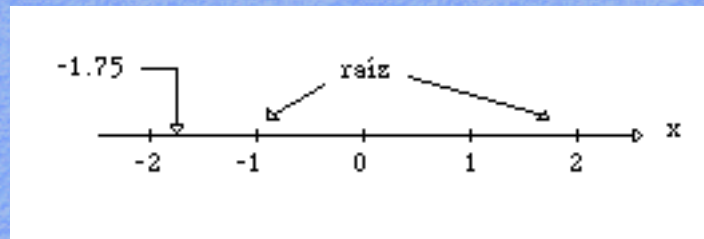


Figura 3.10.- Raíces en el plano cartesiano

Esto lo que quiere decir es que el despeje propuesto  $g_2(x)$ , nos debe de servir para poder encontrar las dos raíces -1 y 2.

Probemos con  $x_0=0$  en  $g_2(x)$ :

$$x_{\text{Act}} = -(2+x_{\text{Ant}})^{1/2} \text{ Ecuación iterativa}$$

$$x_1 = -(2+x_0)^{1/2} = -1.41421356237$$

$$x_2 = -(2+x_1)^{1/2} = -0.765366864732$$

$$x_3 = -(2+x_2)^{1/2} = -1.11114046604$$

$$x_4 = -(2+x_3)^{1/2} = -0.94279347365$$

$$x_5 = -(2+x_4)^{1/2} = -1.02820548839$$

$$x_6 = -(2+x_5)^{1/2} = -0.9857$$

tiende a -1, punto fijo de  $g(x)$  y raíz de  $f(x)$ .

Probando con  $x_0=0$  en  $g_3(x)$ :

$$x_{\text{Act}} = (2+x_{\text{Ant}})^{1/2} \text{ Ecuación iterativa}$$

$$x_1 = (2+x_0)^{1/2} = 1.41421356237$$

$$x_2 = (2+x_1)^{1/2} = 1.84775906502$$

$$x_3 = (2+x_2)^{1/2} = 1.96157056081$$

$$x_4 = (2+x_3)^{1/2} = 1.99036945335$$

tiende a 2, punto fijo de  $g(x)$  y raíz de  $f(x)$ .

Por lo tanto  $x_0$  si nos sirve para encontrar las dos raíces.

Probando con  $g_4(x)$ :

$$g_4(x) = 1 + 2/x$$

$$g_4'(x) = 2*(-1) / x^2$$

$$g_4'(x) = -2 / x^2$$



$$|g_4'(x)| = \left| \frac{-2}{x^2} \right| < 1$$

$$\left| \frac{-2}{x^2} \right| < 1$$

$$|-2| < x^2$$

$$x^2 > |-2|$$

$$x^2 > 2$$

$$x > 2^{1/2}$$

$$x > 1.4142$$

Esto quiere decir que el despeje hecho, nos podrá servir para encontrar la raíz mayor a 1.4142 o sea para encontrar la raíz.

Probemos ahora  $g_5(x)$ :

Se desea saber si ¿este despeje es válido para encontrar la raíz de -1? O bien ¿este despeje es válido para encontrar la raíz 2?

$$g_5(x) = 2 / (x-1) = 2*(x-1)^{-1}$$

$$g_5'(x) = 2*(-1)*(x-1)^{-2} \, dx/dx$$

$$g_5'(x) = -2 / (x-1)^2$$

$$|g_5'(x)| = \left| \frac{-2}{(x-1)^2} \right|$$

Probemos sí esto fuese válido para encontrar la raíz igual a -1.

$$\left| \frac{-2}{(-1-1)^2} \right| = \left| \frac{-2}{(-2)^2} \right| = \left| \frac{-2}{4} \right| = \left| \frac{-1}{2} \right| = 0.5$$

$$\therefore |g_5'(x)| < 1$$

y el despeje propuesto, si nos sirve para encontrar esta raíz.

Ahora probemos si el despeje de  $g_5(x)$ , nos sirve para encontrar la raíz igual a 2.

$$\left| \frac{-2}{(2-1)^2} \right| = \left| \frac{-2}{1} \right| = |-2| = 2$$

$$\therefore |g_5'(x)| > 1$$

y el despeje propuesto, no nos sirve para encontrar la segunda raíz.

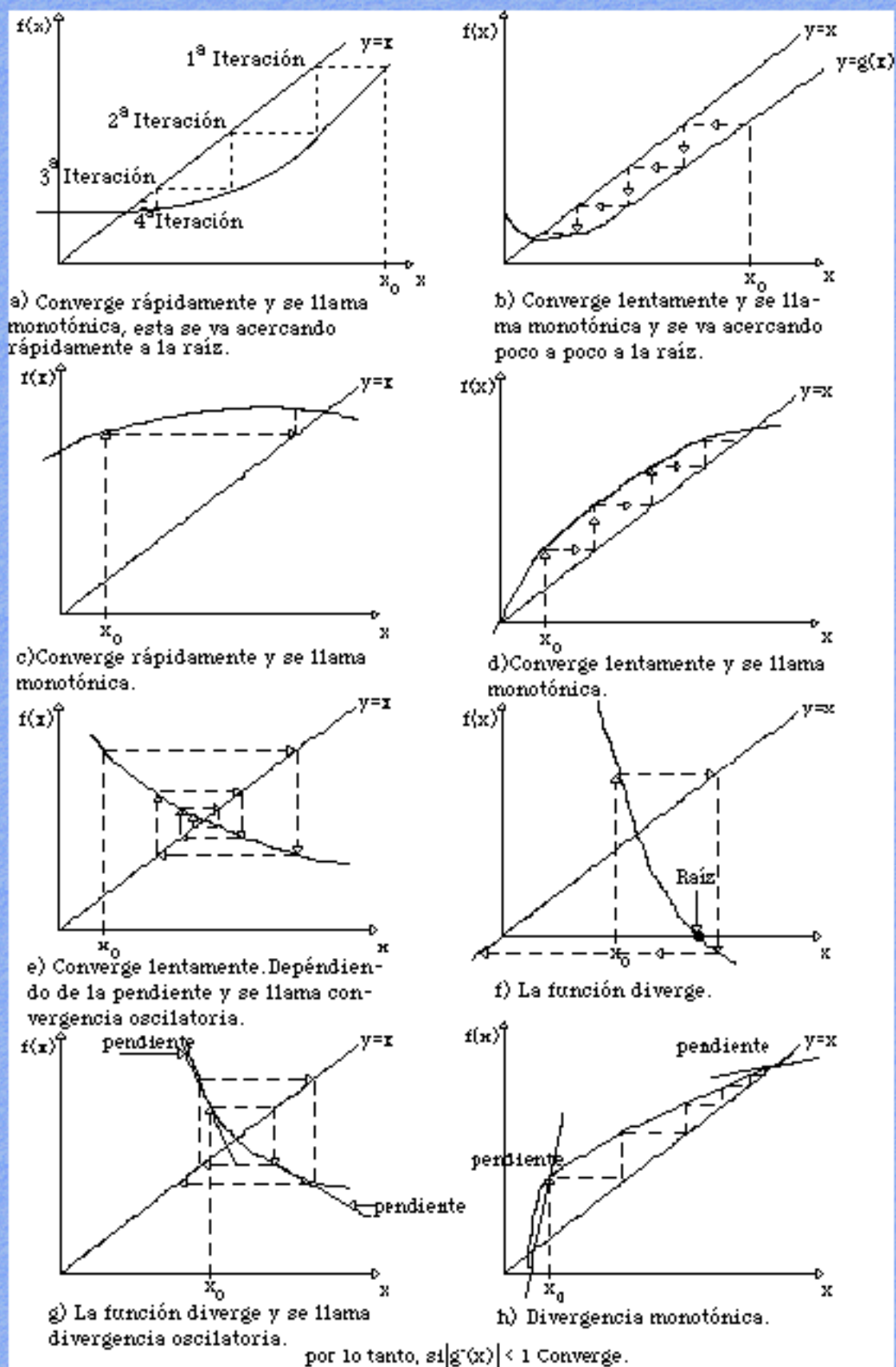


Figura 3.11.- Formas de convergencia.

[Regreso a la página principal.](#)

## 3.6 y 3.7 Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson o simplemente el método de Newton, es uno de los métodos numéricos para resolver un problema de búsqueda de raíces  $f(x)=0$  más poderosos y conocidos.

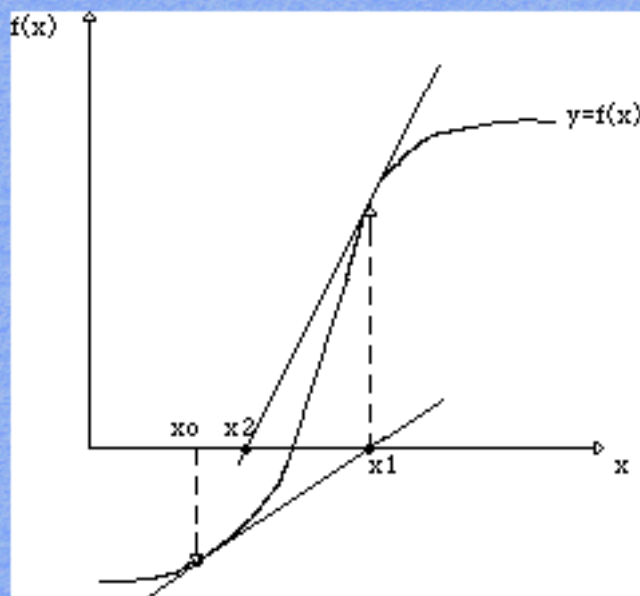


Figura 3.11.- Aproximaciones con tangentes sucesivas.

Esta figura muestra como se obtienen las aproximaciones usando tangentes sucesivas. Comenzando con la aproximación inicial  $x_0$ , la aproximación  $x_1$  es la intersección con el eje  $x$  de la línea tangente a la gráfica de  $f$  en  $(x_0, f(x_0))$ . La aproximación  $x_2$  es la intersección con el eje de las  $x$  de la línea tangente a la gráfica de  $f$  en  $(x_1, f(x_1))$  y así sucesivamente.

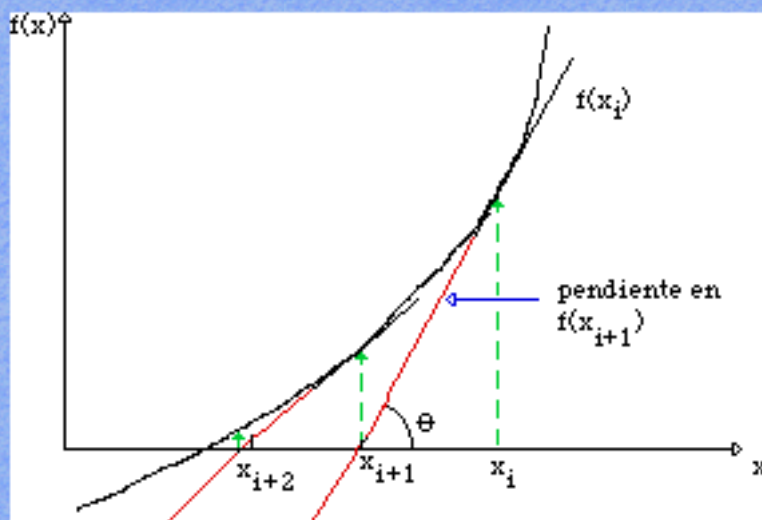


Figura 3.12.- Aproximaciones conociendo los valores  $x_i$ 's.



$m = \tan \theta = f'(x)$  pendiente de la recta que pasa por  $(x_i, f(x_i))$ .

$$m = \tan \theta = \text{Cateto opuesto} / \text{Cateto adyacente} = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} = f'(x_i)$$

Lo que en realidad se desea saber es cuanto vale  $x_{i+1}$  para tomarlo en cuenta para la siguiente iteración, y así seguiría sucesivamente, hasta obtener la raíz.

$$\begin{aligned} \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} &= f'(x_i) \\ \frac{x_i - x_{i+1}}{f(x_i) - f(x_{i+1})} &= \frac{1}{f'(x_i)} \\ -x_{i+1} &= -x_i + \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \\ x_{i+1} &= x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \end{aligned}$$

Ejemplo:

Encontrar la raíz de  $f(x) = x^5 + x^2 - 9$  con un valor inicial de  $x_0 = 1.5$  y  $\xi = 0.001$ .

Solución:

$$f(x) = x^5 + x^2 - 9 \quad f'(x) = 5x^4 + 2x$$

$$f(x_0 = 1.5) = (1.5)^5 + (1.5)^2 - 9 = 0.84375$$

$$f'(x_0 = 1.5) = 5 \cdot (1.5)^4 + 2 \cdot (1.5) = 28.3125$$

$$x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0) = 1.5 - (0.84375 / 28.3125) = 1.4701986755$$

$$\text{ERA}(x_1, x_0) = \left| \frac{1.4701986755 - 1.5}{1.4701986755} \right| = 0.02027 \quad (\text{que no es menor a } \xi)$$

$$f(x_1 = 1.4701) = (1.4701)^5 + (1.4701)^2 - 9 = 0.03027251527$$

$$f'(x_1 = 1.4701) = 5 \cdot (1.4701)^4 + 2 \cdot (1.4701) = 26.300465906$$

$$x_2 = x_1 - f(x_1) / f'(x_1) = 1.4701 - (0.03027 / 26.3004) = 1.4690476496$$

$$\text{ERA}(x_2, x_1) = \left| \frac{1.4690476496 - 1.4701986755}{1.4690476496} \right| = 0.007835 \quad (\text{que no es menor a } \xi)$$

$$f(x_2 = 1.469) = (1.469)^5 + (1.469)^2 - 9 = 0.0004339341$$

$$f'(x_2 = 1.469) = 5 \cdot (1.469)^4 + 2 \cdot (1.469) = 26.2250948663$$

$$x_3 = x_2 - f(x_2) / f'(x_2) = 1.469 - (0.00043 / 26.2250) = 1.46903110316$$

$$\text{ERA}(x_3, x_2) = \frac{|1.46903110316 - 1.46904764968|}{1.46903110316} = 0.00001126 \quad (\text{que sí es menor a } \xi)$$

$$\therefore \text{Raíz} = x_3 = 1.46903110316$$

A continuación se presenta el procedimiento a seguir en Turbo Pascal.

Procedure Newton-Raphson ( $x_0$ :Real);

Var

$x\_ant, x\_act, \text{Epsilon}$  :real;

$\text{Itera}, \text{maxItera}$  :byte;

$\text{Encontrado}$  :boolean;

Begin

$x\_ant := x_0$ ;

$\text{Itera} := 0$ ;

$\text{Encontrado} := \text{False}$ ;

$\text{Epsilon} := 0.001$ ;

$\text{max\_Itera} := 10$ ;

Repeat

$x\_act := x\_ant - f(x\_ant) / fp(x\_ant)$ ;

If  $\text{ERA}(x\_act, x\_ant) < \text{Epsilon}$

Then

$\text{Encontrado} := \text{True}$

Else

$x\_ant := x\_act$ ;

$\text{Itera} := \text{Itera} + 1$

Until ( $\text{itera} > \text{max\_Itera}$ ) or  $\text{Encontrado}$ ;

If  $\text{encontrado}$

Then

Writeln('la raíz =',  $x\_act$ :0:4)

Else

Writeln('El método fracasó después de',  $\text{Itera}$ , 'Iteraciones');

Readln

End;

Fallas del método de Newton-Raphson

1.- El método es atrapado por una raíz imaginaria  $f(x)$ .



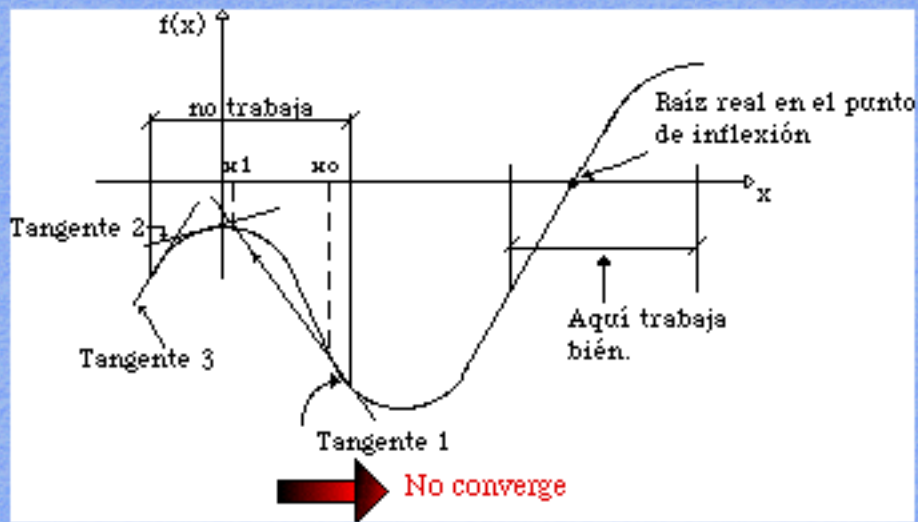


Figura 3.13.- Falla 1 de Newton-Raphson

2.- Cuando la raíz es un punto de inflexión.

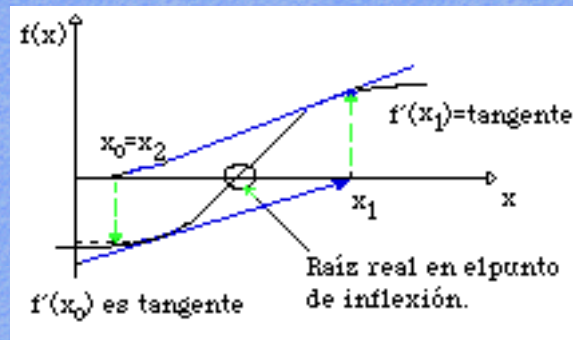


Figura 3.14.- Falla 2 de Newton-Raphson

3.- El método "cae" en un punto máximo o mínimo ( o en sus cercanías).

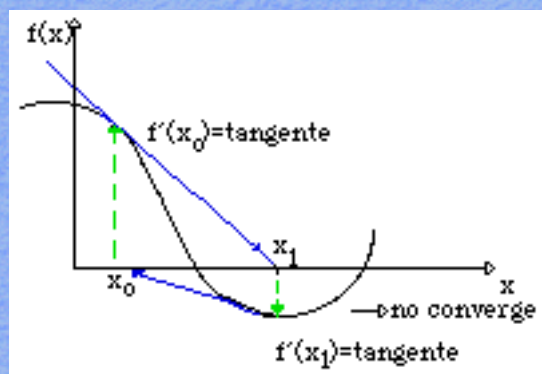


Figura 3.15.- Falla 3 de Newton-Raphson

Ejemplo 2:

Encontrar la raíz de  $f(x)=e^x-3x=0$  que se encuentra en  $[0,1]$  usando  $x_0=0$  y el método de Newton con una  $\xi=0.001$ .



Solución:

$$f(x) = e^x - 3x$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

recordemos que

$$f'(x) = e^x - 3$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{e^{x_i} - 3x_i}{e^{x_i} - 3}$$

sustituyendo para  $x_1$  con  $x_0=0$

$$x_1 = x_0 - \frac{e^0 - 3(0)}{e^0 - 3} = 0 - \frac{e^0 - 3(0)}{e^0 - 3} = 0.5$$

$$\text{ERA } (x_1=0.5, x_0=0) = \left| \frac{0.5-0}{0.5} \right| = 1 \quad (\text{es mayor a } \xi)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{e^{x_1} - 3x_1}{e^{x_1} - 3} = 0.5 - \frac{e^{0.5} - 3(0.5)}{e^{(0.5)_1} - 3} = 0.6101$$

$$\text{ERA } (x_2=0.6101, x_1=0.5) = \left| \frac{0.6101-0.5}{0.6101} \right| = 0.1804 \quad (\text{es mayor a } \xi)$$

$$x_3 = x_2 - \frac{e^{x_2} - 3x_2}{e^{x_2} - 3} = 0.6101 - \frac{e^{0.6101} - 3(0.6101)}{e^{(0.6101)_1} - 3} = 0.618997350866$$

$$\text{ERA } (x_3=0.618997350866, x_2=0.6101) = \left| \frac{0.618997350866 - 0.6101}{0.6189} \right| = 0.014376 \quad (\text{es mayor a } \xi)$$

$$x_4 = x_3 - (e^{x_3} - 3x_3) / (e^{x_3} - 3) = 0.6189 - (e^{0.6189} - 3(0.6189)) / (e^{0.6189} - 3) = 0.619028039928$$

$$\text{ERA } (x_3=0.6190280399928, x_2=0.6189)$$

$$\left| \frac{0.6190280399928 - 0.6189}{0.6190280399928} \right| = 0.00004957 < \xi = 0.001$$

$$\therefore \text{Raíz} = x_4 = 0.619023039928$$

Ejercicio:

La siguiente fórmula se aplica a un vertedor con contracciones:

$$Q = 3.33 \cdot (B - 0.2 \cdot H) \cdot (H^3)^{1/2}$$

Donde:

Q - Cantidad de agua que pasa por el vertedor en pies<sup>3</sup>/seg

B - Ancho del vertedor en pies

H - Carga sobre la cresta del vertedor en pies.

Si B=3 ; Q=12 entonces cual es el valor de H=?.

Calcular por el método de Newton-Raphson con  $\xi = 0.001$  y  $H_0 = B/2$

Solución:

$$12 = 3.33 \cdot (3 - 0.2 \cdot H) \cdot (H^3)^{1/2}$$

$$f(H) = 12 - 3.33 \cdot (3 - 0.2 \cdot H) \cdot (H^3)^{1/2} = 0$$

$$f'(H) = -3.33 \cdot (3 - 0.2H) \cdot (1/2) \cdot (H^3)^{-1/2} + (H^3)^{1/2} \cdot (-3.33) \cdot (-0.2)$$

$$f'(H) = -3.33 \cdot (3) \cdot (1/2) \cdot (H)^{-3/2} (3 \cdot H^2) \cdot (-3.33) \cdot (-0.2H) \cdot (1/2) \cdot (H)^{-3/2} (3 \cdot H^2) + (3.33) \cdot (0.2) \cdot (H^{3/2})$$

$$f'(H) = -14.985 \cdot H^{1/2} + 0.99 \cdot H \cdot H^{-3/2} \cdot H^2 + 0.666 \cdot H^{3/2}$$

$$f'(H) = -14.985 \cdot H^{1/2} + 1.665 \cdot H^{3/2}$$

$$f(H) = 12 - 3.33 \cdot (3 - 0.2H) \cdot (H^3)^{1/2}$$

$$f'(H) = -14.985 \cdot H^{1/2} + 1.665 \cdot H^{3/2}$$

$$H_{i+1} = H_i - \frac{f(H_i)}{f'(H_i)}$$

Iniciar con  $H_0 = B/2$ ,  $H_0 = 3/2$ ,  $H_0 = 1.5$

i	$H_i$	$f(H_i)$	$f'(H_i)$	$H_{i+1}$	ERA
0	1.5	-4.51	-15.32	1.20517	-
1	1.20517	-0.16	-14.26	1.19362	$9.5837 \times 10^{-3}$
2	1.19362	- 0.000278	-14.20	1.19360	0.000016756

$\therefore$  la raíz es  $H_2 = 1.19360$ .

[Regreso a la página principal.](#)



---

## 3.8 Raíces complejas

---

La eficacia del método de Newton-Raphson requiere obtener una buena aproximación inicial.

Una forma adecuada de encontrar los ceros aproximados, o raíces de un polinomio  $p(x)$ , es la siguiente:

-Evalúe  $p(x)$  en  $x_i$  para  $i=1,2,\dots,k$ ; si  $p(x_i)p(x_j) < 0$  entonces  $p$  tiene un cero entre  $x_i$  y  $x_j$ .

Otro problema que se presenta al aplicar el método de Newton-Raphson a los polinomios, es la posibilidad de que el polinomio contenga raíces complejas, cuando todos los coeficientes son números reales.

Si la aproximación inicial mediante el método de Newton-Raphson es un número real, también lo serán las aproximaciones subsecuentes. De manera tal que para poder encontrar las raíces complejas se debe de comenzar con una aproximación inicial compleja y efectuar todos los cálculos por medio de la aritmética compleja.

[Regreso a la página principal.](#)



## 4.0 RAICES REALES DE SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Anteriormente estudiamos el problema de aproximar soluciones a una sola ecuación no lineal de la forma  $f(x)=0$ . Ahora estudiaremos las generalizaciones de las técnicas que nos permiten aproximar las soluciones de los sistemas de ecuaciones no lineales.

### 4.1 El método del descenso más rápido (Richard Burden 614-620).

El método del descenso más rápido tiene una rapidez de convergencia menor que otros métodos numéricos, como por ejemplo: el método de Newton Raphson. Sin embargo, este método casi siempre convergirá incluso con aproximaciones iniciales deficientes.

El método de Newton, efectivamente converge más rápido, sin embargo, esto es cierto una vez que se conoce una aproximación suficientemente exacta. En consecuencia con el método del descenso más rápido se logran aproximaciones iniciales suficientemente exactas para las técnicas que tienen como base el método de Newton.

Este método del descenso más rápido es de gran utilidad como primer método para resolver los sistemas no lineales y se emplea para aproximar la solución al siguiente sistema de ecuaciones no lineales.

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \text{ Sistema de ecuaciones no lineales.}$$

...

...

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Es decir, este método se emplea para aproximar las raíces reales del sistema de ecuaciones no lineales.

Esto se hace, reemplazando al sistema de ecuaciones no lineales anterior, por la función  $g$ .

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n [f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2$$

a la cual se le busca que tenga el valor mínimo de cero.

El método del descenso más rápido para encontrar un mínimo de una función arbitraria  $\vec{x}$  puede describirse así:

- 1.- Evalúe  $g$  con una aproximación inicial  $\vec{x}(0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^t$ .
- 2.- Determinar una dirección desde  $\vec{x}^{(0)}$  que origine una disminución del valor de  $g$ .
- 3.- Desplace una cantidad apropiada hacia esta dirección y llame al nuevo vector  $\vec{x}^{(1)}$ .
- 4.- Repita los pasos 1 al 3 reemplazando  $\vec{x}^{(0)}$  con  $\vec{x}^{(1)}$ .

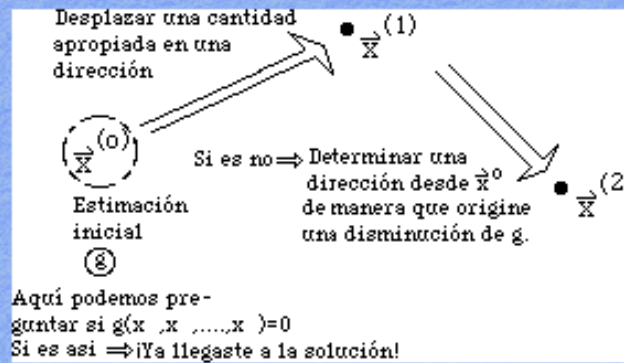


Figura 4.1.- Desglose de direcciones apropiadas para disminuir estimaciones.

Primero evalúe  $g$  con una aproximación inicial

$$\vec{x}^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^t$$

Segundo determine una dirección desde  $\vec{x}^{(0)}$  que origine una disminución del valor de  $g$ .

Para hacer esto se requiere calcular:

1) El gradiente de la función  $g$

$$\nabla g(\vec{x}^0)$$

2) Al resultado anterior se le llama  $\vec{z} = \nabla g(\vec{x}^0)$

3) Encontrar el tamaño de  $\vec{z}$  y se le llama  $z_0$  (Si el tamaño de un vector es cero entonces el gradiente es cero)

$$z_0 = \|\vec{z}\|$$

En el caso de que  $z_0$  sea igual a cero se termina el procedimiento.

4) Convertimos a  $\vec{z}$  en un vector unitario

$$\hat{\vec{z}} = \frac{\vec{z}}{z_0}$$

$\hat{\vec{z}}$  nos va ayudar a determinar una dirección desde  $\vec{x}^{(0)}$  que origine una disminución del valor de  $g$  (la función).

$g_1, g_2, g_3$  significa que tanto va a disminuir o aumentar en una dirección para que,  $g$  siga disminuyendo o aumentando.

Los valores de  $a_1, a_2, a_3$  son asignados por el método y son fijos.

$$\begin{aligned} 5) a_1 &= 0 \\ a_3 &= 1 \\ a_2 &= \frac{a_3}{2} \\ g_1 &= g(\vec{x} - a_1 \hat{\vec{z}}) \\ g_2 &= g(\vec{x} - a_2 \hat{\vec{z}}) \\ g_3 &= g(\vec{x} - a_3 \hat{\vec{z}}) \end{aligned}$$

Al evaluar  $g_1, g_2$  y  $g_3$  debemos de asegurarnos de que  $g_3$  sea menor que  $g_1$ .

En el caso de que esto no ocurra, entonces hacemos  $a_3 = a_3 / 2$  y volvemos a calcular  $g_1, g_2$  y  $g_3$ .

Volvemos a checar si  $g_3 < g_1$ , en el caso de que esto todavía no suceda y si  $a_3 < \frac{\text{Tolerancia}}{2}$ , entonces aquí paramos.



$$\begin{aligned}
 6) h_1 &= (g_2 - g_1)/a_2 \\
 h_2 &= (g_3 - g_2)/(a_3 - a_2) \\
 h_3 &= (h_2 - h_1)/a_3 \\
 7) a_o &= 0.5 \left( a_2 - \frac{h_1}{h_3} \right) \\
 g_o &= g(\hat{x} - a_o \hat{z})
 \end{aligned}$$

8) Hay que escoger el valor de  $a$  que de el  $g$  más pequeño cuando  $g$  se evalúa con  $a_o$  y  $a_3$ .

9) Al valor escogido lo llamamos  $a$ .

Tercero: Desplace una cantidad apropiada hacia esta dirección y llame al nuevo vector  $\hat{x}^{(1)}$

$$\begin{aligned}
 10) \hat{x}^{(1)} &= \hat{x}^{(0)} - a\hat{z}; \\
 \text{calculamos : } &g(\hat{x}^{(1)}) \\
 11) \text{Finaliza\_cuando} &\Rightarrow |g(\hat{x}^{(0)}) - g(\hat{x}^{(1)})| < \text{Tolerancia} \\
 12) \text{Si no se regresa al paso 1 con} &\rightarrow \hat{x}^{(0)} = \hat{x}^{(1)}
 \end{aligned}$$

Ejemplo:

Encontrar una aproximación inicial razonable a la solución del sistema no lineal.

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - 1/2 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + (10x_3 - 3)/3 = 0$$

con una tolerancia de  $\xi = 0.05$ ; un número de iteraciones máximo de 10 y con una aproximación inicial  $\hat{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^t = (0, 0, 0)^t$ .

Solución:

$$\text{Sea } g(x_1, x_2, x_3) = [f_1(x_1, x_2, x_3)]^2 + [f_2(x_1, x_2, x_3)]^2 + [f_3(x_1, x_2, x_3)]^2.$$

con  $\hat{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$  tenemos:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - 1/2$$

En radianes:

$$f_1(0, 0, 0) = 0 - \cos(0) - 1/2 = -1.5$$

$$[f_1(0, 0, 0)]^2 = (-1.5)^2 = 2.25$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$

$$f_2(0, 0, 0) = 0 - 81(0 + 0.1)^2 + 0 + 1.06 = 0.25$$

$$[f_2(0, 0, 0)]^2 = (0.25)^2 = 0.0625$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + (10x_3 - 3)/3$$

$$f_3(0, 0, 0) = e^{-(0)(0)} + 0 + 9.472 = 1 + 0 + 9.472 = 10.472$$

$$[f_3(0, 0, 0)]^2 = (10.472)^2 = 109.66278$$

$$\therefore g(\hat{x}^{(0)}) = g(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = [f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})]^2 + [f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})]^2 + [f_3(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})]^2$$

$$g(0, 0, 0) = 2.25 + 0.0625 + 109.66278$$

$$g(0, 0, 0) = 111.97528$$

El siguiente paso es encontrar lo que se conoce como gradiente de una función. En este caso, debemos de conocer el gradiente de la función  $g$ .

El gradiente de la función  $g$ , se denota como:

$$\nabla g(\hat{x})$$

Y se define por medio de :

$$\nabla g(\hat{x}) = \left[ \frac{\partial g(\hat{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial g(\hat{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g(\hat{x})}{\partial x_n} \right]^t$$



El operador  $\nabla$  conocido como operador nabla, no es otra cosa más que:

$$\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right]$$

El operador nabla es como cualquier otro operador. Por ejemplo: +, -, \*, /,  $\sqrt{\phantom{x}}$ ,  $\Sigma$ , etc.

El gradiente de una función de varias variables es análogo a la derivada de una función de una sola variable, en el sentido de que una función de varias variables diferenciables puede tener un mínimo relativo en  $\vec{x}$  sólo cuando el gradiente sea cero. Entonces vamos a encontrar el gradiente de g

$$\begin{aligned} \nabla g(x_1, x_2, x_3) &= \nabla g(\vec{x}) = \nabla [f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2 + [f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2 \\ &+ [f_3(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2] \\ \nabla g(\vec{x}) &= [2 * f_1(\vec{x}) * \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} + 2 * f_2(\vec{x}) * \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_1} + 2 * f_3(\vec{x}) * \frac{\partial f_3(\vec{x})}{\partial x_1}, \\ &2 * f_1(\vec{x}) * \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_2} + 2 * f_2(\vec{x}) * \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_2} + 2 * f_3(\vec{x}) * \frac{\partial f_3(\vec{x})}{\partial x_2}, \\ &2 * f_1(\vec{x}) * \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_3} + 2 * f_2(\vec{x}) * \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_3} + 2 * f_3(\vec{x}) * \frac{\partial f_3(\vec{x})}{\partial x_3}]^t \end{aligned}$$

Por lo tanto, necesitamos encontrar las derivadas parciales de las funciones  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$  con respecto a  $x_1, x_2$ , y  $x_3$  de cada uno de ellos.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} (3 * x_1 - \cos(x_1 * x_3) - 1/2) =$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 3 - (-\sin(x_1 * x_3)) \frac{\partial (x_1 * x_3)}{\partial x_1} = 3 + \sin(x_1 * x_3) * x_3$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 3 + (\sin(x_1 * x_3)) * x_3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^2 - 81 * (x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 2 * x_1$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} (e^{-x_1 x_2} + 20 * x_3 + (10 * \pi - 3) / 3) = e^{-x_1 x_2} * \left( \frac{\partial}{\partial x_1} (-x_1 * x_2) \right)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -x_2 * e^{-x_1 x_2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} (3 * x_1 - \cos(x_1 * x_3) - \frac{1}{2})$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1^2 - 81 * (x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06) = 2 * (-81 * (x_2 + 0.1)) * (1)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -162(x_2 + 0.1)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} (e^{-x_1 x_2} + 20 * x_3 + (10 * \pi - 3) / 3) = e^{-x_1 x_2} (-x_1)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = e^{-x_1 x_2} (-x_1)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3} (3 * x_1 - \cos(x_1 * x_3) - \frac{1}{2}) = 0 - (-\sin(x_1 * x_3)) * x_1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \sin(x_1 * x_3) * x_1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3} (x_1^2 - 81 * (x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06) = 0 - 0 + \cos x_3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \cos x_3$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3} (e^{-x_1 x_2} + 20 * x_3 + (10 * \pi - 3) / 3)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 20$$

Vamos a evaluar cada una de estas derivadas con respecto a  $x' = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 3 + [\sin(x_1 * x_3)] * x_3$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 2 * x_1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -x_2 * e^{-x_1 x_2}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -162 * (x_2 + 0.1)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -162 * 0.1 = -16.2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -16.2$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = e^{-x_1 x_2} (-x_1)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \sin(x_1 * x_3) * x_1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \cos x_3 = \cos(0) = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 1$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 20$$



Ahora vamos a evaluar  $\nabla g(\vec{x})$  para  $\rightarrow \nabla g(0, 0, 0)$

$$\nabla g(\vec{x}) = [2 * f_1(\vec{x}) * \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} + 2 * f_2(\vec{x}) * \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_1} + 2 * f_3(\vec{x}) * \frac{\partial f_3(\vec{x})}{\partial x_1}, \\ 2 * f_1(\vec{x}) * \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_2} + 2 * f_2(\vec{x}) * \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_2} + 2 * f_3(\vec{x}) * \frac{\partial f_3(\vec{x})}{\partial x_2}, \\ 2 * f_1(\vec{x}) * \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_3} + 2 * f_2(\vec{x}) * \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_3} + 2 * f_3(\vec{x}) * \frac{\partial f_3(\vec{x})}{\partial x_3}]^t$$

Sustituyendo valores:

$$\nabla g(\vec{x}) = \nabla g(x_1, x_2, x_3) = \nabla g(0, 0, 0)$$

$$\nabla g(\vec{x}) = [2(-1.5)(3) + 2(0.25)(0) + 2(10.472)(0), 2(1.5)(0) + 2(0.25)(-16.2) + 2(10.472)(0), \\ 2(-1.5)(0) + 2(0.25)(1) + 2(10.472)(20)]$$

$$\nabla g(\vec{x}) = [-9, -8.1, 418.88]$$

Llamemos a este último resultado como el vector  $z(\vec{z})$ ; es decir  $\vec{z} = \nabla g(\vec{x})$  por lo tanto  $\vec{z} = (-9, -8.1, 418.88)$ .

El siguiente paso es encontrar el tamaño de este vector:

$$|\vec{z}| = \sqrt{(-9)^2 + (-8.1)^2 + (418.88)^2} \Rightarrow |\vec{z}| = 419.05497$$

Llamemos a este valor  $z_0$

$$z_0 = 419.05497$$

Sí  $z_0 = 0$ , entonces el tamaño del gradiente es igual a cero, y aquí se terminará el proceso (el sistema puede tener un mínimo).

Si esto no ocurre, entonces hay que buscar cuanto va a avanzar, entonces hacemos  $\hat{\vec{z}} = \frac{\vec{z}}{z_0}$  es decir, convertimos a  $\vec{z}$  en un vector unitario.

$$\hat{\vec{z}} = \frac{\vec{z}}{z_0} = (-9/419.05497, -8.1/419.05497, 418.88/419.05497)$$

$$\vec{z} = (-0.0214768, -0.0193292, 0.9995824)$$

El siguiente paso es hacer:

$a_1 = 0$  Valores fijos e iniciales del método

$$a_3 = 1$$

$$\text{donde } \Rightarrow a_2 = \frac{a_3}{2}$$

$$g_1 = g(\vec{x} - a_1 * \vec{z})$$

$$g_2 = g(\vec{x} - a_2 * \vec{z})$$

$$g_3 = g(\vec{x} - a_3 * \vec{z})$$

Al evaluar  $g_1$ ,  $g_2$ , y  $g_3$ , debemos de asegurarnos de que  $g_3$  sea menor que  $g_1$ . En el caso de que esto no ocurra, entonces

hacemos  $a_3 = \frac{a_3}{2}$ , y volvemos a calcular  $g_1$ ,  $g_2$ , y  $g_3$ . Volvemos a checar si  $g_3 < g_1$ , en caso de que esto todavía no suceda y

si  $a_3 < \frac{\text{tolerancia}}{2}$ , entonces aquí paramos y nos salimos (procedimiento terminado, puede tener un mínimo). Si embargo, en el caso de que ya no se cumpla que  $g_3 < g_1$ , continuamos con el procedimiento. Para este ejemplo se tiene que:

$$a_1 = 0, a_2 = \frac{a_3}{2} = \frac{1}{2} = 0.5, a_3 = 1$$

$$g_1 = g(\vec{x} - a_1 * \vec{z}) = g(\vec{x}) = 111.97528 = g(0, 0, 0)$$

$$g_1 = 111.97528$$

$$g_2 = g(\vec{x} - a_2 * \vec{z}) = g((0, 0, 0) - 0.5(-0.0214768, -0.0193292, 0.9995824))$$

$$g_2 = 2.53557 \quad g_3 = g(\vec{x} - a_3 * \vec{z}) = g[(0, 0, 0) - 1 * (-0.0214768, -0.0193292, 0.9995824)]$$

$$g_3 = 93.5649$$



$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, x_2, x_3) &= 3x_1 - \cos(x_1 x_3) - 1/2 \\
 &= 3(0.0107384) - \cos(0.0107384 * (-0.4997912)) - 0.5 \\
 &= 0.0322152 - \cos(0.0053667579056) - 0.5 \\
 &= -0.4677848 - 0.999985598989 \\
 &= 1.46777039899 \\
 [f_1(x_1, x_2, x_3)]^2 &= \underline{2.15434994415} \\
 f_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 \\
 &= (0.0107384)^2 - 81(0.0096646 + 0.1)^2 + \sin(-0.4997912) + 1.06 \\
 &= 1.1531323456 * 10^{-4} - 81(1.20263244932 * 10^{-2}) - 0.479242288916 + 1.06 = \\
 &= -0.39325925963 \\
 [f_2(x_1, x_2, x_3)]^2 &= \underline{0.154652845285}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_3(x_1, x_2, x_3) &= e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = e^{-(0.0107384 * 0.0096646)} + 20(-0.4997912) + 9.472 \\
 &= 0.999896223045 - 9.995824 + 9.472 = 0.476072223045 \\
 [f_3(x_1, x_2, x_3)]^2 &= \underline{0.226644761555} \\
 g_2 &= 2.15434994415 + 0.154652845285 + 0.226644761555 = 2.535647551
 \end{aligned}$$

El siguiente paso es encontrar  $h_1, h_2, y h_3$ .

$h_1 = (g_2 - g_1) / a_2$   $h_1, h_2, y h_3$  están definidas por el método del

$h_2 = (g_3 - g_2) / (a_3 - a_2)$  descenso más rápido.

$h_3 = (h_2 - h_1) / a_3$

$h_1 = (2.53557 - 111.975) / 0.5$

$h_1 = -218.878$

$h_2 = (93.5649 - 2.53557) / (1 - 0.5)$

$h_2 = 182.05866$

$h_3 = (182.0586 - (-218.878)) / 1$

$h_3 = 400.937$

El siguiente paso es hacer

$a_0 = 0.5 * (a_2 - h_1 / h_3) = 0.5 * (0.5 - (-218.878 / 400.937)) = 0.5229581$  Donde,  $a_0$  esta definida por el método del descenso más rápido.

Después hay que calcular

$g_0 = g(\vec{x} - a_0 * \vec{z}) = g[(0,0,0) - 0.5229581 * (-0.0214768, -0.0193292, 0.9995824)]$

$g_0 = 2.32762$

El siguiente paso es que hay que escoger el valor de  $a$  que de el valor de  $g$  más pequeño, cuando  $g$  se evalúa con  $a_0$  y  $a_3$ .

Realizándolo:

Puesto que para  $a_0 = 0.522959$  y  $g_0 = 2.32762$

Y para  $a_3 = 1$  y  $g_3 = 93.5649$ .

se ve claramente que  $g_0 < g_3$ , por lo tanto, el valor de  $a$  que andamos buscando será  $a_0$  es decir  $a = a_0$ .

$a = 0.5229581$

El siguiente paso es proponer una nueva estimación para las  $x_1, x_2, y x_3$ , esto se hace precisamente utilizando el valor de  $a$  recientemente encontrado.

$\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} - a * \vec{z} = (0,0,0) - 0.5229581 * (-0.0214768, -0.0193292, 0.9995824)$

$\vec{x}^{(1)} = (0.0112314, 0.0101083, -0.5227397)$

Paso 4

Con las nuevas  $\vec{x}^{(1)}$  calculamos  $g(\vec{x}^{(1)})$

$g(\vec{x}^{(1)}) = 2.32762$

si  $|g(\vec{x}^{(0)}) - g(\vec{x}^{(1)})| < \text{Tolerancia}$ , entonces el proceso se término exitosamente y la solución buscada son las  $x$ 's del vector

$\vec{x}^{(1)}$ 

En el caso de que esto no fuese cierto, se dice que  $\left|g(\vec{x}^{(0)}) - g(\vec{x}^{(1)})\right| > \text{Tolerancia}$ , se incrementa en uno el número de iteraciones y se checa si ya se alcanzó el límite de iteraciones para parar el programa, pero si no se ha alcanzado el número máximo de iteraciones, entonces se vuelve a calcular el gradiente de la función  $g(\vec{x})$ .

La siguiente tabla contiene el resto de los resultados.

<b>k</b>	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$g(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$
2	0.137860	-0.205453	-0.522059	1.27406
3	0.266959	0.00551102	-0.558494	1.06813
4	0.272734	-0.00811751	-0.522006	0.468309
5	0.308689	-0.0204026	-0.533112	0.381087
6	0.314308	-0.0147046	-0.520923	0.318837
7	0.324267	-0.00852549	-0.528431	0.287024

El último renglón, es un resultado que puede ser adecuado como aproximaciones iniciales en el método de Newton. Es decir, que en este momento, sería conveniente utilizar una técnica de convergencia más rápida.

Ejemplo:

Aplique el método del descenso más rápido con  $\xi = 0.05$ , para aproximar la solución del siguiente sistema de ecuaciones no lineales.

$$4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0 \text{ con } x^{(0)} = (0,0)^t$$

$$\frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0 \text{ (siete decimales)}$$

Definimos :

$$f_1(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8$$

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8$$

$$g_2(x_1, x_2) = \left[f_1(x_1, x_2)\right]^2 + \left[f_2(x_1, x_2)\right]^2$$



Iteración \_No. - 1

Paso \_1)

$$g(\bar{x}^{(0)}) = [f_1(\bar{x}^{(0)})]^2 + [f_2(\bar{x}^{(0)})]^2 = (8)^2 + (8)^2 = 128$$

$$f_1(0,0) = 4(0)^2 - 20(0) + \frac{1}{4}(0)^2 + 8 = 8$$

$$f_2(0,0) = \frac{1}{2}(0)(0)^2 + 2(0) - 5(0) + 8 = 8$$

Paso \_2)

$$\bar{z} = \nabla g(\bar{x}) = \nabla \left[ [f_1(x_1, x_2)]^2 + [f_2(x_1, x_2)]^2 \right]$$

$$= \left[ 2f_1(\bar{x}) \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} + 2f_2(\bar{x}) \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1}, 2f_1(\bar{x}) \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} + 2f_2(\bar{x}) \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} \right]$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \left( 4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 \right)}{\partial x_1} = 8x_1 - 20$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \left( \frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 \right)}{\partial x_1} = \frac{1}{2}x_2^2 + 2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \left( 4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 \right)}{\partial x_2} = \frac{1}{2}x_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial \left( \frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 \right)}{\partial x_2} = x_1x_2 - 5$$

Evaluando  $\bar{x}=(0,0)$  en las funciones y derivadas, tenemos:

$$f_1(0,0) = 8$$

$$f_2(0,0) = 8$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{(0,0)} = 8(0) - 20 = -20$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_{(0,0)} = \frac{1}{2}(0)^2 + 2 = 2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_{(0,0)} = \frac{1}{2}(0) = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Big|_{(0,0)} = (0)(0) - 5 = -5$$

$$\bar{z} = \nabla g(0,0) = [2(8)(-20) + 2(8)(2), 2(8)(0) + 2(8)(-5)] = [-320 + 32, -80]$$

$$\bar{z} = [-288, -80]$$



Paso \_ 3)

$$|z| = \sqrt{(-288)^2 + (-80)^2} = 298.9046671$$

$$z_o = 298.9046671$$

$$z = \frac{z}{z_o} = \frac{1}{298.9046671}(-288, -80)$$

$$\bar{z} = (-0.9635179, -0.2676439)$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = \frac{a_3}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$g_1 = g(\bar{x} - a_1 \bar{z})$$

$$g_2 = g(\bar{x} - a_2 \bar{z})$$

$$g_3 = g(\bar{x} - a_3 \bar{z})$$

$$g_1 = g(\bar{x} - a_1 \bar{z}) = g(\bar{x} - 0\bar{z}) = g(\bar{x}) = 128$$

$$g_1 = 128$$

$$g_2 = g(\bar{x} - a_2 \bar{z}) = g(\bar{x} - 0.5\bar{z}) = g[(0, 0) - 0.5(-0.9635179, -0.2676439)]$$

$$g_2 = (0.4817589, 0.1338219)$$

$$f_1 = [f_1(0.4817589, 0.1338219)]^2 + [f_2(0.4817589, 0.1338219)]^2$$

$$f_1 = 4(0.4817589)^2 - 20(0.4817589) + \frac{1}{4}(0.1338219)^2 + 8 = -0.7023344$$

$$f_1 = -0.7023344$$

$$f_2 = \frac{1}{2}(0.4817589)(0.1338219)^2 + 2(0.4817589) - 5(0.1338219) + 8 = 8.2987220$$

$$f_2 = 8.62233263$$

$$g_2 = g(0.4817589, 0.1338219)$$

$$= f_1^2 + f_2^2 = (-0.7023344)^2 + (8.2987220)^2 = 69.3620611$$

$$g_2 = 69.3620611$$

$$f_1 = -7.5389827$$

$$f_2 = (0.9635179, 0.2676439) = 8.6233263$$

$$f_2 = 8.62233263$$

$$g_3 = g(0.9635179, 0.2676439) = (-7.5389827)^2 + (8.6233263)^2 = 131.1980162 \quad g_3 = 131.1980162$$

Como  $g_3$  es mayor que  $g_1$  entonces:

$$a_3 = \frac{a_3}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$a_2 = \frac{a_3}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25$$

$$g_2 = g(\bar{x} - a_2 \bar{z}) = g[(0, 0) - 0.25(-0.9635179, -0.2676439)] \\ = g(0.2408795, 0.0669110)$$

$$f_1(0.2408795, 0.0669110) = 3.4156214$$

$$f_2(0.2408795, 0.0669110) = 8.1477432$$

$$g_2 = 78.0521895$$

$$g_3 = g(\bar{x} - a_3 \bar{z}) = g[(0, 0) - 0.5(-0.9635179, -0.2676439)] \\ = g(0.4817589, 0.1338219)$$

$$f_1(0.4817589, 0.1338219) = -0.702344$$

$$f_2(0.4817589, 0.1338219) = 8.2987220$$

$$g_3 = 69.3620611$$

como  $g_3 < g_1$  se calculan  $h_1, h_2, h_3$

$$h_1 = \frac{(g_2 - g_1)}{a_2} = \frac{78.0521895 - 128}{0.25} = -199.791242$$

$$h_2 = \frac{(g_3 - g_2)}{a_3 - a_2} = \frac{69.3620611 - 78.0521895}{0.5 - 0.25} = -34.7605136$$

$$h_3 = \frac{(h_2 - h_1)}{a_3} = \frac{-34.7605136 + 199.791242}{0.5} = 330.0614568$$

Calculando  $a_o$ :

$$a_o = 0.5 \left( a_2 - \frac{h_1}{h_3} \right) = 0.5 \left( 0.25 - \frac{199.791242}{330.0614568} \right)$$

$$a_o = 0.4276576$$

y calculando  $g_o$ .

$$g_o = g(\bar{x} - a_o \bar{z}) = g[(0, 0) - 0.4276576(-0.9635179, -0.2676439)] \\ = g(0.4120558, 0.1144599)$$

$$f_1(0.4120558, 0.1144599) = 0.4413192$$

$$f_2(0.4120558, 0.1144599) = 8.2515113$$

$$g_o = 68.3317192$$

Escogiendo un valor de  $a$  que de una  $g$  más pequeña evaluado en  $a_o$  y  $a_3$

Si  $a_o = 0.4276576$ ;  $a_3 = 0.5$

$$g_o = 68.3317192; g_3 = 69.3620611$$

como  $g_3 > g_o$ :

$$a = a_o = 0.4276576$$

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^o - a\bar{z} = (0, 0) - 0.4276576(-0.9635179, -0.2676439)$$

$$\bar{x}^{(1)} = (0.4120558, 0.1144599)$$

Iteración No.-2

Paso 1)

$$g(0.4120558, 0.1144599) = (f_1)^2 + (f_2)^2 = (0.4413192)^2 + (8.2545113)^2$$

$$g(0.4120558, 0.1144599) = 68.3317192$$

Paso \_2)

Evaluando  $\bar{x}^{(4)} = (0.4120558, 0.1144599)$  en las funciones siguientes

$$f_1 = 0.4413192$$

$$f_2 = 8.2545113$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_1} = 8(0.4120558) - 20 = -16.7035536$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_1} = \frac{1}{2} (0.1144599)^2 + 2 = 2.0065505$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_2} = \frac{1}{2} (0.1144599) = 0.0572299$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_2} = (0.4120558)(0.1144599) - 5 = -4.9528361$$

$$\bar{z} = [2(0.4413192)(-16.7035536) + 2(8.2545113)(2.0065505,$$

$$2(0.4413192)(0.0572299) + 2(8.2545113)(-4.9528361)]$$

$$\bar{z} = (18.3829904, -81.7159702)$$

Paso 3)

$$|\bar{z}| = \sqrt{(18.3829904)^2 + (-81.7159702)^2}$$

$$z_o = 83.7581884$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{z}}{z_o} = \frac{1}{83.7581884} (18.3829904, -81.7159702)$$

$$\bar{z} = (0.2194769, -0.9756177)$$

$$a_1 = 0$$

$$a_3 = 1$$

$$a_2 = 1/2 = 0.5$$

$$g_1 = g(\bar{x} - a_1 \bar{z}); \Rightarrow g_2 = g(\bar{x} - a_2 \bar{z}); \Rightarrow g_3 = g(\bar{x} - a_3 \bar{z})$$

$$g_1 = g(\bar{x} - a_1 \bar{z}) = g(\bar{x}) = g(0.4120558, 0.1144599) = 68.3317192$$

$$g_1 = \underline{\underline{68.3317192}}$$

$$g_2 = g(\bar{x} - 0.5 \bar{z}) = g[(0.4120558, 0.1144599) - 0.5(0.2194769, -0.9756177)]$$

$$= g(0.3023174, 0.6022688)$$

$$f_1 = 2.4099180$$

$$f_2 = 5.6481204$$

$$g_2 = \underline{\underline{37.7089688}}$$

$$g_3 = g(\bar{x} - a_3 \bar{z}) = g[(0.4120558, 0.1144599) - 1(0.2194769, -0.9756177)]$$

$$= g(0.1925789, 1.0900776)$$

$$f_1 = 4.5938358$$

$$f_2 = 3.0491876$$

$$g_3 = \underline{\underline{30.4008725}}$$

como  $g_3 < g_1$  se calculan  $h_1, h_2, h_3$



$$h_1 = \frac{(g_2 - g_1)}{a_2} = \frac{37.7089688 - 68.3317192}{0.5} = -61.2455008$$

$$h_2 = \frac{(g_3 - g_2)}{a_3 - a_2} = \frac{30.4008725 - 37.7089688}{1 - 0.5} = -14.6161926$$

$$h_3 = \frac{(h_2 - h_1)}{a_3} = \frac{-14.6161926 + 61.2450008}{1} = 46.6293082$$

Calculando  $a_o$ :

$$a_o = 0.5 \left( 0.5 - \frac{-61.2455008}{46.6293082} \right)$$

$$a_o = 0.9067275$$

y calculando  $g_o$ .

$$g_o = g(\bar{x} - a_o \bar{z}) = g[(0.4120558, 0.1144599) - 0.9067275(0.2194769, -0.9756177)]$$

$$= g(0.2130501, 0.9990793)$$

$$f_1 = 4.1701001$$

$$f_2 = 3.5370333$$

$$g_o = 29.9003392$$

escogiendo entre  $a_o$  y  $a_3$  tenemos que  $a_o$  da más pequeño:

$$a = a_o$$

$$a = 0.9067275$$

$$\bar{x}^{(2)} = \bar{x}^{(1)} - a\bar{z} = (0.4120558, 0.1144599) - 1(0.2194769, 0.9990793)$$

$$\bar{x}^{(2)} = (0.2130500, 0.9990791)$$

$$|g(\bar{x}^{(1)}) - g(\bar{x}^{(0)})| = |68.3317192 - 128| = 59.6682808 > \epsilon$$

Tabla resumen

k	$X_{1(k)}$	$X_{2(k)}$	$g(X_{1(k)}, X_{2(k)})$
0	0	0	128
1	0.4120558	0.1144599	68.3317192
2	0.2130500	0.9990791	29.9003392
3	0.4300149	1.0468405	15.0816216
4	0.3491509	1.5154867	6.6372612
5	0.4571904	1.5337223	3.2594558
6	0.4240333	1.7618942	1.5149149
7	0.4766078	1.7694624	0.7512996
8	0.4598268	1.8933321	0.3742844
9	0.485133	1.8956275	0.1486623
10	0.482011	1.9589769	0.05597207
11	0.4954701	1.9597449	$2.171025 \times 10^{-2}$

Las raíces son:

$$x_1 = 0.4954701$$

$$x_2 = 1.9597449$$

## Ejemplo en Excel

Aplice el método del descenso más rápido con  $\xi = 0.05$

$$4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0$$

$$\frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0$$

Se muestra una hoja en excel de la primera iteración de la solución del problema .

Aplique el Método del descenso más rápido con TOL=0.05 para aproximar las soluciones del siguiente sistema.											
1.a. $4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0$			TOLERANCIA= 0.05								
$\frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0$											
			DERIVADAS PARCIALES								
ITER	X1	X2	F1(X1,X2)	F2(X1,X2)	F1/X1	F1/X2	F2/X1	F2/X2			
0	0	0	8	8	-20	0	2	-5			
VECTOR Z											
(X1, X2)		abs(Z)									
-288		-80	298.905								
VECTOR UNITARIO											
z0		z0									
-0.9635179		-0.2676439									
Page 1											
a1	a2	a3	X1-a1z0	X2-a1z0	X1-a2z0	X2-a2z0	X1-a3z0	X2-a3z0	g1(X-a1z0)	g1(X-a2z0)	g1(X-a3z0)
0	0.25	0.5	0	0	0.2409	0.0669	0.4818	0.1338219	128	78.0521912	69.3620616
h1	h2	h3	a0	X1-a0z0	X2-a0z0	g0	a				
-199.79124	-34.760519	330.061	0.42766	0.4121	0.1145	68.332	0.4277				

## Tarea:

1) Aplique el método del descenso más rápido con  $\xi = 0.05$  para aproximar las soluciones de los siguientes sistemas no lineales.

a)  $\ln(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1 * x_2) = \ln 2 + \ln \pi$

$e^{x_1 - x_2} + \cos(x_1 * x_2) = 0$

b)  $\sin(4\pi * x_1 * x_2) - 2x_2 - x_1 = 0$

$\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4 * e * x_2^2 - 2 * e * x_1 = 0$

c)  $15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13$

$x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11$

$x_2^3 - 25x_3 = -22$

[Regreso a la página principal.](#)

## 4.2 Iteración de punto fijo multivariable.

El siguiente método se conoce como método de iteración o Método de punto fijo Multivariable, y sirve para encontrar las raíces reales de un sistema de ecuaciones no lineales.

### Pasos del método iterativo del punto fijo multivariable

- 1) Despejar x de una ecuación de manera que quede una x en el lado izquierdo generando  $F(x,y)=\dots$
- 2) Despejar y de igual forma que x generando  $G(x,y)=\dots$
- 3) Verificar si:

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| < 1 \Big|_{x_0, y_0}$$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial G}{\partial y} \right| < 1 \Big|_{x_0, y_0}$$

- 4) Si las condiciones son válidas usar esos despejes como ecuaciones iterativas. En caso contrario, despejar nuevamente para encontrar una nueva x y y.
- 5) Al iterar el término de convergencia, es la norma euclidiana:

$$NE = \left| \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \right| < \zeta$$

si se cumple  $x_{i+1}$  y  $y_{i+1}$  son las raíces, en caso contrario volver a iterar.

Problema:

Considere el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$f(x,y)=x^2-10*x+y^2+8=0 \text{ con } x_0=0 \text{ y } y_0=0$$

$$g(x,y)=x*y^2+x-10*y+8=0$$

Solución:

El método de iteración de punto fijo consiste en despejar x de una ecuación y y de la otra:

$$x=F(x,y)$$

$$y=G(x,y)$$

Después se van encontrando valores de x de  $x=F(x,y)$  y de y a partir de  $y=G(x,y)$  utilizando al principio una suposición inicial para x y para y ( $x_0, y_0$ ), y después los valores anteriores a una iteración.

$$x_{i+1} = F(x_i, y_i)$$



$$y_{i+1} = G(x_i, y_i)$$

Despejando x de la primera ecuación, y y de la segunda ecuación, se obtiene:

$$x_{i+1} = (x_i^2 + y_i^2 + 8) / 10 = F(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = (x_i * y_i^2 + x_i + 8) / 10 = G(x_i, y_i)$$

Existe una condición suficiente aunque no necesaria para la convergencia:

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| < 1 \Big|_{x_0, y_0}$$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial G}{\partial y} \right| < 1 \Big|_{x_0, y_0}$$

Probemos ahora para este ejercicio:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{10} * 2x = \frac{x}{5}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{2xy}{10}$$

Evaluemos con  $x_0=0$  y  $y_0=0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{10} = 0.1 \Rightarrow \text{Si se cumple que ambos son } < 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{10} = \frac{y}{5}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{2xy}{10}$$

Evaluemos con  $x_0=0$  y  $y_0=0$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{2(0)(0)}{10} = 0 \Rightarrow \text{Si se cumple que ambos son } < 1$$

por lo que: Si se cumple  $0+0.1 < 1$

Si se cumple  $0+0$  y para ambos es  $< 1$

Este método se generaliza para más de dos ecuaciones también.

Primera iteración  $i=0$

$$x_1 = (x_0^2 + y_0^2 + 8) / 10 = F(x_0, y_0) = 0.8$$

$$y_1 = (x_0 * y_0^2 + x_0 + 8) / 10 = G(x_0, y_0) = 0.8$$

$$NE = \left| \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \right| > \epsilon$$

Segunda iteración i=1

$$x_2 = (x_1^2 + y_1^2 + 8) / 10 = F(x_1, y_1) = ((0.8)^2 + (0.8)^2 + 8) / 10 = 0.928$$

$$y_2 = (x_1 * y_1^2 + x_1 + 8) / 10 = G(x_1, y_1) = ((0.8) * (0.8)^2 + (0.8) + 8) / 10 = 0.9312$$

$$NE = \left| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right| > \epsilon$$

Tercera iteración i=2

$$x_3 = (x_2^2 + y_2^2 + 8) / 10 = F(x_2, y_2) = ((0.928)^2 + (0.928)^2 + 8) / 10 = 0.9728$$

$$y_3 = (x_2 * y_2^2 + x_2 + 8) / 10 = G(x_2, y_2) = ((0.928) * (0.9312)^2 + (0.928) + 8) / 10 = 0.9732$$

$$NE = \left| \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \right| > \epsilon$$

Cuarta iteración i=3

$$x_4 = (x_3^2 + y_3^2 + 8) / 10 = F(x_3, y_3) = ((0.9728)^2 + (0.9732)^2 + 8) / 10 = 0.9957$$

$$y_4 = (x_3 * y_3^2 + x_3 + 8) / 10 = G(x_3, y_3) = ((0.9728) * (0.9732)^2 + (0.9728) + 8) / 10 = 0.9957$$

$$NE = \left| \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} \right| > \epsilon$$

Quinta iteración i=4

$$x_5 = (x_4^2 + y_4^2 + 8) / 10 = F(x_4, y_4) = ((0.9957)^2 + (0.9957)^2 + 8) / 10 = 0.9983$$

$$y_5 = (x_4 * y_4^2 + x_4 + 8) / 10 = G(x_4, y_4) = ((0.9957) * (0.9957)^2 + (0.9957) + 8) / 10 = 0.9983$$

$$NE = \left| \sqrt{(x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2} \right| > \epsilon$$

Sexta iteración i=5

$$x_6 = (x_5^2 + y_5^2 + 8) / 10 = F(x_5, y_5) = ((0.9983)^2 + (0.9983)^2 + 8) / 10 = 0.9993$$

$$y_6 = (x_5 * y_5^2 + x_5 + 8) / 10 = G(x_5, y_5) = ((0.9983) * (0.9983)^2 + (0.9983) + 8) / 10 = 0.9993$$

$$NE = \left| \sqrt{(x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2} \right| > \epsilon$$

Séptima iteración i=6

$$x_7 = (x_6^2 + y_6^2 + 8) / 10 = F(x_6, y_6) = ((0.9993)^2 + (0.9993)^2 + 8) / 10 = 0.9997$$



$$y_7 = (x_6 * y_6^2 + x_6 + 8) / 10 = G(x_6, y_6) = ((0.9993) * (0.9993)^2 + (0.9993) + 8) / 10 = 0.9997$$

$$NE = \left| \sqrt{(x_7 - x_6)^2 + (y_7 - y_6)^2} \right| < \epsilon \quad \text{si cumple}$$

Por lo tanto las raíces son:

$$x = 0.9997$$

$$y = 0.9997$$

Ejemplo:

Aplice el método de Iteración de punto fijo con tolerancia = 0.05 para aproximar la solución del siguiente SENL.

$$\begin{aligned} 4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2 + 8 &= 0 \\ \frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 &= 0 \\ \text{con } \mathbf{x}^{(0)} &= (0, 0)^t \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2 + 8 = 0 \\ g(x, y) &= \frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0 \end{aligned}$$

Se despejará  $x_1$  con respecto a  $-20x_1$  y se despejará  $x_2$  con respecto a  $-5x_2$

$$\begin{aligned} x &= \frac{4x_2 + \frac{1}{4}y^2 + 8}{20} \\ y &= \frac{0.5xy^2 + 2x + 8}{5} \\ 1) \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{4}{20}x_2 - \frac{1}{4(20)}y^2 + \frac{8}{20} \right) = \frac{8}{20}x = \frac{2}{5}x \\ 2) \frac{\partial G}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{0.5}{5}xy^2 + \frac{2}{5}x + \frac{8}{5} \right) = \frac{0.5}{5}y^2 + \frac{2}{5} \end{aligned}$$



$$3) \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{4}{20} x^2 - \frac{1}{4(20)} y^2 + \frac{8}{20} \right) = -\frac{y}{40}$$

$$4) \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{0.5}{5} xy^2 + \frac{2}{5} x + \frac{8}{5} \right) = \frac{1}{5} xy$$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| < 1$$

$$\left| \frac{2}{5} x \right| + \left| \frac{0.5}{5} y^2 + \frac{2}{5} \right| < 1$$

$$0 + \left| 0 + \frac{2}{5} \right| < 1$$

$$0.4 < 1 \text{ (si)}$$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial G}{\partial y} \right| < 1$$

$$\left| -\frac{y}{40} \right| + \left| \frac{1}{5} xy \right| < 1$$

$$0 + 0 < 1 \text{ (si)}$$

$$\therefore x_{i+1} = \frac{4x_i^2 + 0.25y_i^2 + 8}{20}$$

$$y_{i+1} = \frac{0.5x_i y_i^2 + 0.2x_i + 8}{5}$$

$$1) x_1 = \frac{4(0)^2 + 0.25(0) + 8}{20} = 0.4$$

$$y_1 = \frac{0.5(0)(0)^2 + 2(0) + 8}{5} = 1.6$$

$$\|x\| = \left| \sqrt{(x_{\text{Act}} - x_{\text{Ant}})^2 - (y_{\text{Act}} - y_{\text{Ant}})^2} \right|$$

$$2) x_2 = \frac{4(0.4)^2 + 0.25(1.6)^2 + 8}{20} = 0.464$$

$$y_2 = \frac{0.5(0.4)(1.6)^2 + 2(0.4) + 8}{5} = 1.8624$$

$$\|x\| = \left| \sqrt{(0.464 - 0.4)^2 - (1.8624 - 1.6)^2} \right| = 0.27 > \xi$$

$$3) x_3 = \frac{4(0.464)^2 + 0.25(1.8624)^2 + 8}{20} = 0.486415872$$

$$y_3 = \frac{0.5(0.464)(1.8624)^2 + 2(0.464) + 8}{5} = 1.9465399665$$

$$\|x\| = \left| \sqrt{(0.486415872 - 0.464)^2 - (1.9465399665 - 1.8624)^2} \right| = 0.087 > \xi$$

$$4)x_4 = \frac{4(0.486415872)^2 + 0.25(1.9465399665)^2 + 8}{20} = 0.49468280312$$

$$y_4 = \frac{0.5(0.486415872)(1.9465399665)^2 + 2(0.486415872) + 8}{5} = 1.9788701905$$

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{(0.49468280312 - 0.486415872)^2 + (1.9788701905 - 1.9465399665)^2}$$

$$= 3.3999 \times 10^{-2} \text{ (si)}$$

$$\therefore x_4 = 0.4946$$

$$y_4 = 1.9788$$

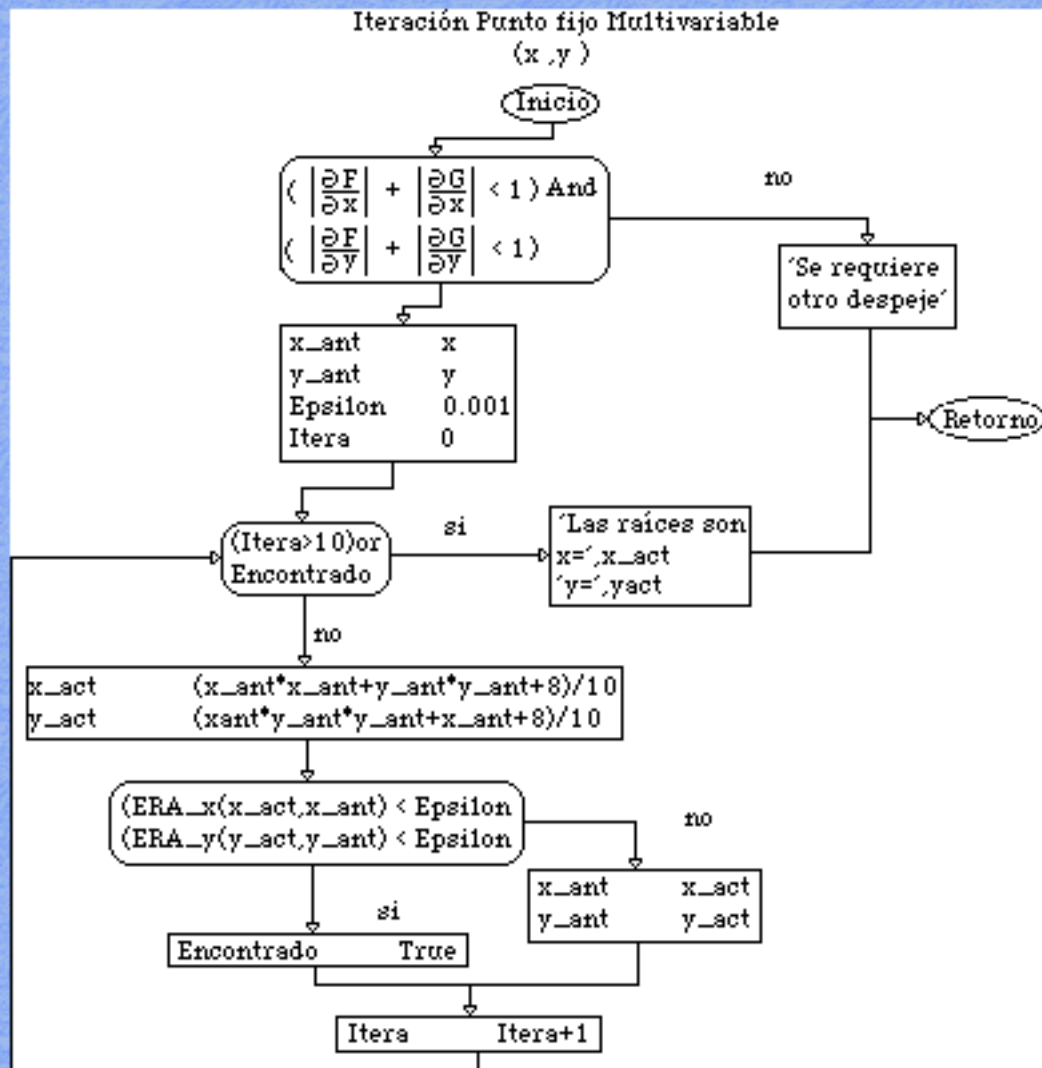


Figura 4.2.- Diagrama de flujo del método de iteración.

### Tarea:

Página 604 del Burden

Mediante el método iterativo de punto fijo multivariable con  $x^{(0)}=0$  y  $\xi =0.05$  ó  $\text{Itera}=3$  lo que ocurra primero calcule las raíces para los siguientes SENL.

$$\begin{aligned}1) & 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0 \\ & 4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0 \\ & e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0 \\ 2) & x_1^2 + x_2 - 37 = 0 \\ & x_1 - x_2^2 - 5 = 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0\end{aligned}$$

[Regreso a la página principal.](#)



### 4.3 Método de Newton Raphson multivariable o método de Newton.

El método de Newton para encontrar las raíces reales de un sistema de ecuaciones no lineales, se basa en la expansión de la serie de Taylor, pero para dar tres o más variables según sea el problema que se tenga.

Por ejemplo, para un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$f(x,y)=0$$

$$g(x,y)=0 \text{ con valores aproximados } x_0 \text{ y } y_0.$$

Se busca que la solución exacta sea igual a:

$$x=x_0+\Delta x$$

$$y=y_0+\Delta y$$

Para buscar los valores de  $\Delta x$  y de  $\Delta y$  se emplea la serie de Taylor para 2 variables, expandida en solo dos términos.

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) &= f(x, y) + \left( \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0 \\ g(x + \Delta x, y + \Delta y) &= g(x, y) + \left( \Delta x \frac{\partial g}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial g}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Se trata de encontrar las 2 incógnitas  $\Delta x$  y de  $\Delta y$  de este par de ecuaciones.

Para hacer esto se utiliza el método de Kramer respetando la siguiente nomenclatura:

$$\begin{aligned} f &= f(x, y) \\ g &= g(x, y) \\ f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} \\ f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} \\ g_x &= \frac{\partial g}{\partial x} \\ g_y &= \frac{\partial g}{\partial y} \end{aligned} \quad (2) \quad (I)$$

Substituyendo en (1) las ecuaciones (2)

$$f + \Delta x f_x + \Delta y f_y = 0$$

$$g + \Delta x g_x + \Delta y g_y = 0$$

pasando f y g al otro miembro

$$\Delta x f_x + \Delta y f_y = -f$$

$$\Delta x g_x + \Delta y g_y = -g \quad (3)$$

Las ecuaciones (3) son un SEL de 2x2 así que se puede resolver por Gauss, Gauss/Jordan o por Cramer.

Utilizando Cramer:

$$d = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = f_x g_y - g_x f_y$$

$$\Delta x = \frac{\begin{vmatrix} -f & f_y \\ -g & g_y \end{vmatrix}}{d} = \frac{-f g_y + g f_y}{d}$$

$$\Delta y = \frac{\begin{vmatrix} f_x & -f \\ g_x & -g \end{vmatrix}}{d} = \frac{-f_x g + f g_x}{d}$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{-f g_y + g f_y}{f_x g_y - g_x f_y} \\ \Delta y &= \frac{-f_x g + f g_x}{f_x g_y - g_x f_y} \end{aligned} \quad (\text{II})$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y$$

generalizando

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y \quad (\text{III})$$

El criterio de convergencia

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^k| < \xi$$

o bien, la norma euclidiana

$$|x| = \sqrt{(x_1^{(k+1)} - x_1^k)^2 + (x_2^{(k+1)} - x_2^k)^2 + \dots + (x_n^{(k+1)} - x_n^k)^2}$$

Ejemplo:

$$f(x,y) = x^2 - 10x + y^2 + 8 = 0$$

$$g(x,y) = xy^2 + x - 10y + 8 = 0$$

$$\text{con } (x_0, y_0) = (0, 0)$$

Solución:

$$f = f(x, y) = x^2 - 10x + y^2 + 8$$

$$g = g(x, y) = xy^2 + x - 10y + 8$$

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial (x^2 - 10x + y^2 + 8)}{\partial x} = 2x - 10$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial (x^2 - 10x + y^2 + 8)}{\partial y} = 2y$$

$$g_x = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial (xy^2 + x - 10y + 8)}{\partial x} = y^2 + 1$$

$$g_y = \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial (xy^2 + x - 10y + 8)}{\partial y} = 2xy - 10$$

$$f = x^2 - 10x + y^2 + 8$$

$$g = xy^2 + x - 10y + 8$$

$$f_x = 2x - 10$$

$$f_y = 2y$$

$$g_x = y^2 + 1$$

$$g_y = 2xy - 10$$

(I)

Ahora evaluamos  $f$ ,  $g$ ,  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $g_x$ ,  $g_y$  con respecto a los valores iniciales dados.

$$f = (0)^2 - 10(0) + (0)^2 + 8 = 8$$

$$g = (0)(0)^2 + (0) - 10(0) + 8 = 8$$

$$f_x = 2(0) - 10 = -10$$

$$f_y = 2(0) = 0$$

$$g_x = (0)^2 + 1 = 1$$

$$g_y = 2(0)(0) - 10 = -10$$

$$\therefore f = 8; g = 8; f_x = -10; f_y = 0; g_x = 1; g_y = -10$$

Substituyendo en las ecuaciones II correspondientes para encontrar los valores de  $\Delta x$  y  $\Delta y$ :

$$\Delta x = \frac{-f_y g_y + g_y f_y}{f_x g_y - f_y g_x} = \frac{-8(-10) + 8(0)}{(-10)(-10) - (0)(1)} = \frac{80}{100} = 0.8$$

$$\Delta y = \frac{-g_f x + f g_x}{f_x g_y - f_y g_x} = \frac{-8(-10) + 8(1)}{(-10)(-10) - (0)(1)} = \frac{88}{100} = 0.88$$

Calculando  $x_1, y_1$ , con las ecuaciones (III)

$$x_1 = x_0 + \Delta x = 0 + 0.8 = 0.8$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y = 0 + 0.88 = 0.88$$

Se calcula la norma euclidiana o distancia



$$|z| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \sqrt{(0.8 - 0)^2 + (0.88 - 0)^2}$$

$$|z| = \sqrt{0.64 + 0.7744} = \sqrt{1.4144} = 1.1892 > \xi$$

Evaluemos  $f$ ,  $g$ ,  $f_x$ ,  $g_x$ ,  $f_y$ ,  $g_y$  con respecto a los valores  $x_1=0.8$  y  $y_1=0.88$

$$f = (0.8)^2 - 10(0.8) + (0.88)^2 + 8 = 1.4144$$

$$g = (0.8)(0.88)^2 + (0.8) - 10(0.88) + 8 = 0.61952$$

$$f_x = 2(0.8) - 10 = -8.4$$

$$f_y = 2(0.88) = 1.76$$

$$g_x = (0.88)^2 + 1 = 1.744$$

$$g_y = 2(0.8)(0.88) - 10 = -8.592$$

$$\therefore f = 1.4144; g = 0.61952; f_x = -8.4; f_y = 1.76; g_x = 1.744; g_y = -8.592$$

Substituyendo en las ecuaciones II correspondientes para encontrar los valores de  $\Delta x$  y  $\Delta y$ :

$$\Delta x = \frac{-fg_y + gf_y}{f_x g_y - f_y g_x} = \frac{-(1.4144)(-8.592) + (0.61952)(1.76)}{(-8.4)(-8.592) - (1.76)(1.744)} = 0.196175354805$$

$$\Delta y = \frac{-gf_x + fg_x}{f_x g_y - f_y g_x} = \frac{-(0.61952)(-8.4) + (1.4144)(1.744)}{(-8.4)(-8.592) - (1.76)(1.744)} = 0.111711737096$$

Calculando  $x_2, y_2$ , con las ecuaciones III

$$x_2 = x_1 + \Delta x = 0.8 + 0.196175354805 = 0.996175354805$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y = 0.88 + 0.111711737096 = 0.991711737096$$

Se calcula la norma euclidiana o distancia

$$|z| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0.9961 - 0.8)^2 + (0.9917 - 0.88)^2}$$

$$|z| = \sqrt{5.0964} = 0.2257 > \xi$$

Evaluemos  $f$ ,  $g$ ,  $f_x$ ,  $g_x$ ,  $f_y$ ,  $g_y$  con respecto a los valores  $x_2=0.9961$  y  $y_2=0.88$

$$f = (0.9961)^2 - 10(0.9961) + (0.9917)^2 + 8 = 0.01410395896$$

$$g = (0.9961)(0.9917)^2 + (0.9961) - 10(0.9917) + 8 = 0.05878864474$$

$$f_x = 2(0.9961) - 10 = -8.00764929039$$

$$f_y = 2(0.9917) = 1.98342347419$$

$$g_x = (0.9917)^2 + 1 = 1.983492169494$$

$$g_y = 2(0.9961)(0.9917) - 10 = -8.02416241587$$

Substituyendo en las ecuaciones (II) correspondientes para encontrar los valores de  $\Delta x$  y  $\Delta y$ :

$$\Delta x = \frac{-fg_y + gf_y}{f_x g_y - f_y g_x} = 0.00380923492388$$

$$\Delta y = \frac{-gf_x + fg_x}{f_x g_y - f_y g_x} = 0.00826805701786$$

Calculando  $x_3, y_3$ , con las ecuaciones III

$$\begin{aligned}x_3 &= x_2 + \Delta x = 0.996175354805 + 0.00380923492388 = \\x_3 &= 0.999984589729 \\y_3 &= y_2 + \Delta y = 0.991711737096 + 0.00826805701786 \\y_3 &= 0.999979794114\end{aligned}$$

Se calcula la norma euclidiana o distancia

$$\begin{aligned}|\mathbf{x}| &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{(0.9999 - 0.9961)^2 + (0.9999 - 0.9917)^2} \\|\mathbf{x}| &= 0.0091 > \xi\end{aligned}$$

Evalúemos  $f, g, f_x, f_y, g_x, g_y$  con respecto a los valores  $x_3=0.999984589729$  y  $y_3=0.999979794114$

$$\begin{aligned}f &= x^2 - 10x + y^2 + 8 = 0.000082871045 \\g &= xy^2 + x - 10y + 8 = 0.000130827307 \\f_x &= 2x - 10 = -8.00003082052 \\f_y &= 2y = 1.99995998823 \\g_x &= y^2 + 1 = 1.99995958864 \\g_y &= 2xy - 10 = -8.00007123169\end{aligned}$$

Substituyendo en las ecuaciones II correspondientes para encontrar los valores de  $\Delta x$  y  $\Delta y$ :

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{-f g_y + g f_y}{f_x g_y - f_y g_x} = 0.0000154101416461 \\ \Delta y &= \frac{-g f_x + f g_x}{f_x g_y - f_y g_x} = 0.0000202056911128\end{aligned}$$

Calculando  $x_4, y_4$ , con las ecuaciones III

$$\begin{aligned}x_4 &= x_3 + \Delta x = 0.999984589729 + 0.0000154101416461 = \\x_4 &= 0.999999999871 \\y_4 &= y_3 + \Delta y = 0.999979794114 + 0.0000202056911128 \\y_4 &= 0.999999999805\end{aligned}$$

Se calcula la norma euclidiana o distancia

$$\begin{aligned}|\mathbf{x}| &= \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} \\|\mathbf{x}| &= 0.00002541 < \xi \\(\text{si\_cumple})\end{aligned}$$

Las raíces son:  $x_4=0.999999999871$  y  $y_4=0.999999999805$



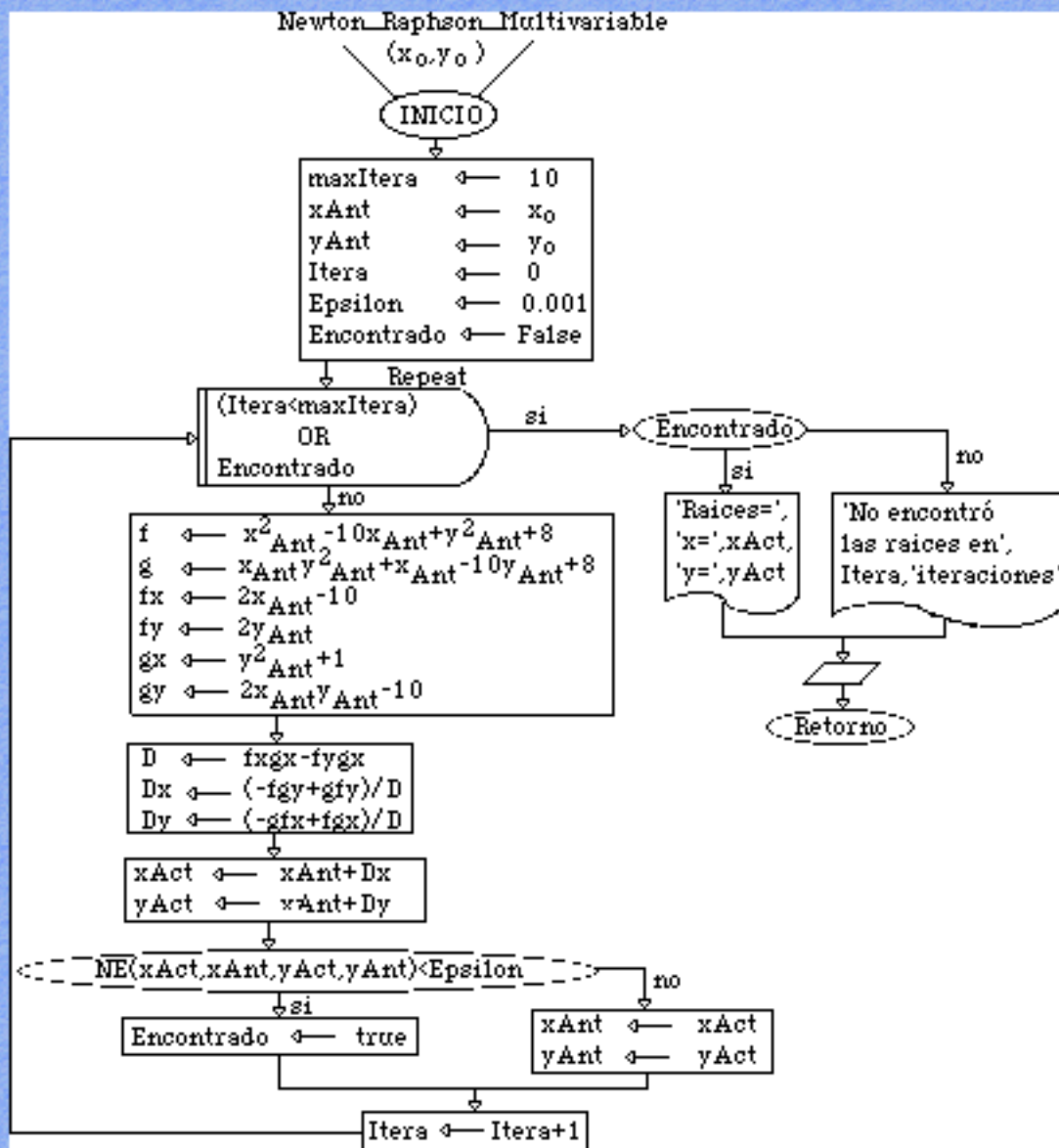


Figura 4.3 Diagrama de flujo del Método de Newton-Raphson Multivariable

Tal y como decíamos al principio de este tema del “4.3” Método de Newton”, este método sirve para encontrar las raíces reales de un sistema de ecuaciones no lineales, basado en la expansión de la serie de Taylor, para dos, tres ó más variables, según sea el problema que se tenga.

Para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$f(x, y, z) = 0$$

$$g(x, y, z) = 0$$

$$h(x, y, z) = 0$$

La serie de Taylor quedaría como sigue:



$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = f(x, y, z) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$g(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = g(x, y, z) + \Delta x \frac{\partial g}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial g}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

$$h(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = h(x, y, z) + \Delta x \frac{\partial h}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial h}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

considerando la siguiente nomenclatura:

$$f(x, y, z) = f$$

$$g(x, y, z) = g$$

$$h(x, y, z) = h$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x; \frac{\partial g}{\partial x} = g_x; \frac{\partial h}{\partial x} = h_x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y; \frac{\partial g}{\partial y} = g_y; \frac{\partial h}{\partial y} = h_y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z; \frac{\partial g}{\partial z} = g_z; \frac{\partial h}{\partial z} = h_z$$

se puede escribir el anterior sistema como:

$$\Delta x f_x + \Delta y f_y + \Delta z f_z = -f$$

$$\Delta x g_x + \Delta y g_y + \Delta z g_z = -g$$

$$\Delta x h_x + \Delta y h_y + \Delta z h_z = -h$$

resolviendo este sistema por el método de Kramer, nos queda:

$$\Delta x = \frac{\begin{vmatrix} -f & f_y & f_z \\ -g & g_y & g_z \\ -h & h_y & h_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix}}; \Delta y = \frac{\begin{vmatrix} f_x & -f & f_z \\ g_x & -g & g_z \\ h_x & -h & h_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix}}; \Delta z = \frac{\begin{vmatrix} f_x & f_y & -f \\ g_x & g_y & -g \\ h_x & h_y & -h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix}}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix}$$

se conoce al determinante del Jacobiano como:

Tarea:

Por el método de Newton-Raphson multivariable resolver el SENL.

$$f(x, y, z) = 2x + 2y + z - 4 = 0$$

$$g(x, y, z) = x + 2y + z - 4 = 0$$

$$h(x, y, z) = xyz - 1 = 0$$

con  $(x_0, y_0, z_0) = (-0.5, -0.5, 6)$  y con  $\xi = 0.05$

[Regreso de la página principal.](#)



## 4.4 Polinomios de interpolación

### 4.4.1 Newton Lagrange o Diferencias Divididas

Los polinomios de interpolación de Newton Lagrange o de Diferencias divididas son polinomios que sirven para encontrar el valor de una función  $f(x)$  para un cierto valor de  $x$ .

Uno de los polinomios de interpolación de lagrange pueden tener diferentes números de términos, desde dos términos hasta  $n+1$  términos.

Por ejemplo, el de dos términos tiene la forma:

$$f(x)=a_0+a_1x$$

y se emplea cuando se conocen 2 puntos y los respectivos valores de sus funciones, es decir:  $x_0, f(x_0)$  y  $x_1, f(x_1)$ , y se desea conocer más valores de la función  $f(x)$  para una  $x$  dada.

Otro ejemplo será el de tres términos:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

Este polinomio se emplea cuando se conocen 3 puntos y los respectivos valores de sus funciones, es decir:  $x_0, f(x_0)$ ,  $x_1, f(x_1)$  y  $x_2, f(x_2)$ , y se desea conocer con valor de la función  $f(x)$  para una  $x$  dada.

Otro ejemplo será el de cuatro términos:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$$

Este polinomio se emplea cuando se conocen 4 puntos y los respectivos valores de sus funciones es decir:  $x_0, f(x_0)$ ,  $x_1, f(x_1)$ ,  $x_2, f(x_2)$ , y  $x_3, f(x_3)$ , y se desea conocer un valor de la función  $f(x)$  para una  $x$  dada.

Esto seguiría así sucesivamente:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4 \text{ (para 5 puntos conocidos)}$$

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5 \text{ (para 6 puntos conocidos)}$$

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6 \text{ (para 7 puntos conocidos)}$$

..  
..  
..

Para encontrar los valores de  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ , etc, según sea el caso, se emplean los valores conocidos de  $x_0, f(x_0); x_1, f(x_1); x_2, f(x_2); x_3, f(x_3); x_4, f(x_4); x_5, f(x_5), \dots$ , etc.

Este método tiene la ventaja de que no necesita resolver el SEL y los cálculos se realizan directamente, con las siguientes fórmulas:



$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k \left[ \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \right]$$

donde:

$a_k$  = Diferencia Dividida de la parte superior del triángulo formado por las mismas.

$$f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}$$

donde :

$$i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$j = i+1, i+2, i+3, \dots, n$$

Tabla 1.-Diferencias Divididas

		Primeros	Segundos	Terceros
x	f(x)	$\Delta f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
$x_0$	$f[x_0]$			
$x_1$	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
$x_2$	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
$x_3$	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
$x_4$	$f[x_4]$	$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$	$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$
$x_5$	$f[x_5]$	$f[x_4, x_5] = \frac{f[x_5] - f[x_4]}{x_5 - x_4}$	$f[x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_4, x_5] - f[x_3, x_4]}{x_5 - x_3}$	$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_3, x_4, x_5] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_2}$

Ejemplo:

Si  $n=1$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n=1} a_k \left[ \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \right] = a_0 + a_1(x - x_0)$$

si  $n=2$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n=2} a_k \left[ \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \right] = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Como ejemplo para el caso de :  $f(x)=a_0+a_1x$ ,

se deben de conocer 2 puntos:  $x_0, f(x_0), x_1, f(x_1)$

Es decir, en este caso se trata de la ecuación de una línea recta.

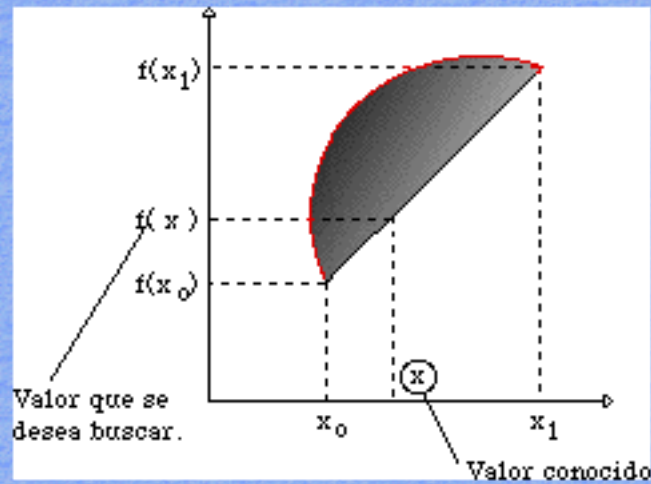


Figura 4.4.-Línea recta.

De la ecuación de la línea recta, nosotros sabemos que:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{Pendiente}$$

En este caso tendríamos:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{Pendiente}$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \text{Pendiente}$$

Igualando estas dos ecuaciones:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

despejando de esta ecuación a f(x):

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

$$f(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0) + f(x_0)$$

Este ya es un polinomio de interpolación de Newton Lagrange.

Ejemplo:

Encontrar el valor de  $\ln(2)$  sabiendo que  $\ln(1)=0$  y  $\ln(6)=1.7917595$ ;  $\ln(6)=f(x_1)=f(6)$ ;

$\ln(1)=f(x_0)=f(1)$ ;  $x_1=6$  y  $x_0=1$ .

Solución:

$$f(2) = \frac{f(6) - f(1)}{6 - 1} (2 - 1) + f(1)$$

$$f(2) = \frac{1.7917595 - 0}{6 - 1} (2 - 1) + 0$$

$$f(2) = 0.3583519$$



o sea  $\ln(2)=0.3583519$

El valor real de  $\ln(2)=0.69314718056$

$$\begin{aligned}\%Error &= \left| \frac{\text{Valor\_Real} - \text{Valor\_Aproximado}}{\text{Valor\_Real}} \right| \times 100 \\ \%Error &= \left| \frac{0.69314718056 - 0.3583519}{0.69314718056} \right| \times 100 \\ \%Error &= |0.483007490977| \times 100 \\ \%error &= 48.3\end{aligned}$$

El error es muy grande debido a la separación entre  $x_1$  y  $x_0$ .

Ejemplo:

Encontrar el valor de  $\ln(2)$  sabiendo que  $\ln(1)=0$  y  $\ln(3)=1.0986123$

Solución:

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln(x) \\ f(x_1) &= \ln(x_1) = \ln(3) = 1.0986123 \\ f(x_0) &= \ln(x_0) = \ln(1) = 0 \\ x_1 &= 3 \\ x_0 &= 1 \\ \therefore f(2) &= \frac{1.0986123 - 0}{3 - 1} (2 - 1) + 0 \\ f(2) &= 0.54930615\end{aligned}$$

o sea  $\ln(2)=0.54930615$

$$\begin{aligned}\%Error &= \left| \frac{\text{Valor\_Real} - \text{Valor\_Aproximado}}{\text{Valor\_Real}} \right| \times 100 \\ \%Error &= \left| \frac{0.69314718056 - 0.54930615}{0.69314718056} \right| \times 100 \\ \%Error &= |0.20751874| \times 100 \\ \%error &= 20.75\end{aligned}$$

El error es más pequeño que en el ejemplo anterior para el mismo valor buscado de  $\ln(2)$ , debido a que la separación entre  $x_1$  y  $x_0$  es más pequeña que en el caso anterior.

Veamos ahora el caso para el que nosotros conocemos 3 puntos  $x_0, f(x_0); x_1, f(x_1); x_2, f(x_2)$ ; y deseamos conocer una  $f(x)$  para un valor de  $x$  que se encuentre dentro de los valores de  $x_0, x_1$ , y  $x_2$ .

El polinomio será:

$$\begin{aligned}f(x) &= b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \\ f(x) &= b_0 + b_1x - b_1x_0 + b_2(x^2 - xx_1 - x_0x + x_0x_1) \\ f(x) &= b_0 + b_1x - b_1x_0 + b_2x^2 - b_2xx_1 - b_2x_0x + b_2x_0x_1\end{aligned}$$

Ahora podemos agrupar los términos que no contengan a  $x$ , los que contengan a  $x$ , y los que contengan a  $x^2$ .



$$f(x) = b_0 - b_1x_0 + b_2x_0x_1 + b_1x - b_2xx_1 - b_2x_0x + b_2x^2$$

De manera tal que podemos llamar  $a_0$  a todos los términos que no contienen  $x$ ,  $a_1$  a los términos que sean factores de  $x$ , y  $a_2$  a los términos que sean factores de  $x^2$ .

$$f(x) = \underbrace{b_0 - b_1x_0 + b_2x_0x_1}_{a_0} + \underbrace{(b_1 - b_2x_1 - b_2x_0)x}_{a_1} + \underbrace{b_2x^2}_{a_2}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 - b_1x_0 + b_2x_0x_1 \\ a_1 &= b_1 - b_2x_1 - b_2x_0 \\ a_2 &= b_2 \end{aligned}$$

De manera tal que el polinomio

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \text{ (Polinomio _ Newton _ Lagrange)}$$

También se puede escribir como

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Donde  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  están definidos líneas arriba.

Los dos polinomios anteriores, son diferentes formas de expresar los polinomios de interpolación de Newton Lagrange.

Lo que sigue ahora es encontrar los valores de  $b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$  a partir de los valores conocidos de puntos  $x_0$ ,  $f(x_0)$ ;  $x_1$ ,  $f(x_1)$ ;  $x_2$ ,  $f(x_2)$ .

Si  $x = x_0$

$$f(x_0) = b_0 + b_1 \underbrace{(x_0 - x_0)}_0 + b_2 \underbrace{(x_0 - x_0)}_0 (x_0 - x_1)$$

$$f(x_0) = b_0$$

Si  $x = x_1$

$$f(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) + b_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_1)$$

$$f(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0)$$

$$f(x_1) = f(x_0) + b_1(x_1 - x_0)$$

$$f(x_1) - f(x_0) = b_1(x_1 - x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Si  $x = x_2$

$$f(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$f(x_2) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$f(x_2) - f(x_0) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x_2 - x_0) = b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \frac{(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = b_2$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = b_2$$

De manera tal que el polinomio de interpolación de Newton Lagrange o de Diferencias Divididas para cuando se conocen tres puntos, se puede expresar como:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) +$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo:

Encontrar  $\log(4)$ , sabiendo que:  $\log(3)=0.4771$ ;  $\log(5)=0.6989$ ;  $\log(4.5)=0.6532$ ; Valor real de  $\log(4)=0.602059991328$ .

$$x_0 = 3$$

$$f(x_0) = \log(3) = 0.4771$$

$$x_1 = 5$$

$$f(x_1) = \log(5) = 0.6989$$

$$x_2 = 4.5$$

$$f(x_2) = \log(4.5) = 0.6532$$

$$f(x_2) - f(x_0) = 0.6532 - 0.4771 = 0.1761$$

$$f(x_1) - f(x_0) = 0.6989 - 0.4771 = 0.2218$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)} = \frac{0.6532 - 0.4771}{4.5 - 3} = 0.1174$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{0.6989 - 0.4771}{5 - 3} = 0.1109$$

$$(x - x_0) = 4 - 3 = 1$$

$$(x - x_1) = 4 - 5 = -1$$

$$(x_1 - x_0) = 5 - 3 = 2$$

$$(x_2 - x_1) = 4.5 - 5 = -0.5$$



$$f(x) = 0.4771 + 0.1109(1) + \frac{0.1174 - 0.1109}{-0.5}(1)(-1)$$

$$f(x) = \log(4) = 0.4771 + 0.1109 + \frac{0.0065}{-0.5}(-1)$$

$$\log(4) = 0.4771 + 0.1109 + 0.013$$

$$\log(4) = 0.601$$

$$\%Error = \left| \frac{\text{Valor\_Real} - \text{Valor\_Aproximado}}{\text{Valor\_Real}} \right| \times 100$$

$$\%Error = \left| \frac{0.602059991328 - 0.601}{0.602059991328} \right| \times 100$$

$$\%Error = |0.0017606074864| \times 100$$

$$\%error = 0.176\%$$

Otra manera de expresar los polinomios de interpolación Newton Lagrange es a través del uso de diferencias divididas.

Por ejemplo, para el caso del ejercicio anterior en donde se desea conocer el  $\log(4)$  sabiendo que conocemos tres puntos, es decir:

$$\log(3) = 0.4771$$

$$\log(5) = 0.6989$$

$$\log(4.5) = 0.6532$$

i	$x_i$	$f(x_i)$	$\Delta f$	$\Delta^2 f$
0	3	0.4771	0.1109	
1	5	0.6989		-0.013
2	4.5	0.6532	0.0914	

El significado de esta tabla es que:

$$\Delta f, \text{ quiere decir diferencia 1ª, es decir: } \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$\Delta^2 f, \text{ quiere decir diferencia 2ª, es decir: } \frac{\frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

Y la ecuación de Newton Lagrange o de Diferencias Divididas expresada en forma de diferencias divididas para cuando se conocen tres puntos es:



$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) + \frac{\frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}(x - x_0)(x - x_1)$$

Por lo tanto expresado en forma de deltas:

$$f(x) = f(x_0) + \Delta f(x - x_0) + \Delta^2 f(x - x_0)(x - x_1)$$

Sustituyendo valores, para el problema de encontrar  $f(x) = \log(x) = \log(4)$

$$\log(4) = 0.4771 + 0.1109(4-3) + (-0.013)(4-3)(4-5)$$

$$\log(4) = 0.4771 + 0.1109 + 0.013$$

$$\log(4) = 0.6010$$

Como el valor real  $\log(4) = 0.602059991328$

$$\%Error = \left| \frac{0.602059991328 - 0.601}{0.602059991328} \right| \times 100$$

$$\%Error = 0.176\%$$

Ahora vamos a presentar otro ejemplo, para ver como podríamos resolver un problema de interpolación de Newton Lagrange para cuando conocemos más de tres puntos y expresado en forma de diferencia divididas:

i	$x_i$	$f(x_i)$	$\Delta f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
0	0	1					
1	0.5	2.09	2.18				
2	1	2.91	1.64	-0.54			
3	1.5	3.94	2.06	0.42	0.64		
4	2	5.72	3.56	1.5	0.72	0.04	
5	2.5	8.69	5.94	2.38	0.58	-0.07	-0.044

$$\therefore f(x) = f(x_0) + \Delta f(x - x_0) + \Delta^2 f(x - x_0)(x - x_1) + \Delta^3 f(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \Delta^4 f(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \Delta^5 f(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \quad [I]$$

lo que queremos encontrar es el valor de  $f(1.6)$ .

$$f(1.6) = 1 + 2.18(1.6 - 0) + (-0.54)(1.6 - 0)(1.1) + 0.64(1.6 - 0)(1.6 - 0.5)(1.6 - 1) + 0.04(1.6 - 0)(1.6 - 0.5)(1.6 - 1)(1.6 - 1.5) + (-0.044)(1.6 - 0)(1.6 - 0.5)(1.6 - 1)(1.6 - 1.5)(1.6 - 2)$$

$$f(1.6) = 1 + (2.18)(1.6) + (-0.54)(1.6)(1.1) + (0.64)(1.6)(1.1)(0.6) + (0.04)(1.6)(1.1)(0.6)(0.1) + (-0.044)(1.6)(1.1)(0.6)(0.1)(-0.4)$$

$$f(1.6) = 1 + 3.488 - 0.9504 + 0.67584 + 0.004224 + 0.00185856$$

$$f(1.6) = 4.21952256$$

Se calculan las primeras diferencias divididas

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{2.09 - 1}{0.5 - 0} = 2.18$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{2.91 - 2.09}{1 - 0.5} = 1.64$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{3.94 - 2.91}{1.5 - 1} = 2.06$$

$$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3} = \frac{5.72 - 3.94}{2 - 1.5} = 3.56$$

$$f[x_4, x_5] = \frac{f[x_5] - f[x_4]}{x_5 - x_4} = \frac{8.69 - 5.72}{2.5 - 2} = 5.94$$

Este mismo problema puede calcularse con las fórmulas de diferencia divididas.

Así calculan las segundas diferencias divididas

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1.64 - 2.18}{1 - 0} = -0.54$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{2.06 - 1.64}{1.5 - 0.5} = 0.42$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2} = \frac{3.56 - 2.06}{2 - 1} = 1.5$$

$$f[x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_4, x_5] - f[x_3, x_4]}{x_5 - x_3} = \frac{5.94 - 3.56}{2.5 - 1.5} = 2.38$$

Se calculan las terceras diferencias divididas

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{0.42 + 0.54}{1.5 - 0} = 0.64$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1} = \frac{1.5 - 0.42}{2 - 0.5} = 0.72$$

$$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_3, x_4, x_5] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_2} = \frac{2.38 - 1.5}{2.5 - 1} = 0.58$$



Se calculan las cuartas diferencias divididas

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0} = \frac{0.72 - 0.64}{2 - 0} = 0.04$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_2, x_3, x_4, x_5] - f[x_1, x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_1} = \frac{0.58 - 0.72}{2.5 - 0.5} = -0.07$$

Se calculan las quintas diferencias divididas

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] - f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_0} =$$

$$\frac{-0.07 - 0.04}{2.5 - 0} = -0.044$$

Se substituyen en [I] y se obtiene  $f(1.6)=4.219522556$ . Un resumen de las fórmulas empleadas se dan en la tabla 1

Ejemplo:

Se dispone de los siguientes datos en una tabla:

<b>i</b>	<b><math>x_i</math></b>	<b><math>f(x_i)</math></b>
0	1	56.5
1	5	113.0
2	20	181.0
3	40	214.5

Y se desea interpolar a  $x=2.0$

Solución:

<b>i</b>	<b><math>x_i</math></b>	<b><math>f x_i</math></b>	<b><math>\Delta f</math></b>	<b><math>\Delta^2 f</math></b>	<b><math>\Delta^3 f</math></b>
0	1	56.5			
1	5	113.0	14.125		
2	20	181.0	4.533	-0.5048	
3	40	214.5	1.675	-0.08165	0.01085

Se calculan las primeras diferencias divididas



$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{113 - 56.5}{5 - 1} = 14.125$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{181 - 113}{20 - 5} = 4.533$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{214.5 - 181}{40 - 20} = 1.675$$

Se calculan las segundas diferencias divididas

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{4.533 - 14.125}{20 - 1} = -0.5048$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{1.675 - 4.533}{40 - 5} = -0.08165$$

Se calculan las terceras diferencias divididas

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{-0.08165 + 0.5048}{40 - 1} = 0.01085$$

Ahora se calcula a f(x) con x=2.0

$$f(x) = f(x_0) + \Delta f(x - x_0) + \Delta^2 f(x - x_0)(x - x_1) + \Delta^3 f(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$f(x = 2) = 56.5 + 14.125(2 - 1) + (-0.5048)(2 - 1)(2 - 5) + 0.01085(2 - 1)(2 - 5)(2 - 20)$$

$$f(x = 2) = 71.6^\circ\text{C}$$

∴ A una función de 2 atmósferas hay una temperatura de 71.6°C.

A continuación se presenta el algoritmo de tabla de Diferencias Divididas

Datos: El número de parejas M de la función tabular y las parejas de valores (x[I], Fx[I])

I=0,1,2,...,M-1

Resultados: La tabla de Diferencia Divididas T

Paso 1 N <-- M-1

Paso 2 I <-- 0

Paso 3 While I <= N-1

Paso 4 T(I,0)=(Fx[I+1]-Fx[I]) / (x[I+1]-x[I])

Paso 5 I <-- I+1

End While I

Paso 6 J <-- 1

Paso 7 While J <= N-1

Paso 8 I <-- J

Paso 9 While I <= N-1

Paso 10 T[I,J] <-- (T[I,J-1]-T[I-1,J-1]) / (x[I+1]-x[I-J])

Paso 11 I <-- I+1

End While I

Paso 12 J <-- J+1

End While J

Paso 13 Imprimir T y Terminar.

Tarea:

Obtenga la aproximación polinomial de Lagrange con todos los puntos. Interpole el valor de la función para  $x=1.6$ .

$i$	$x_i$	$f(x_i)$
0	0	1
1	0.5	2.09
2	1	2.91
3	1.5	3.94
4	2	5.72
5	2.5	8.69

[Regreso a la página principal.](#)

#### 4.4.2 Polinomios de interpolación de Lagrange

Los polinomios de interpolación de Lagrange se calculan a partir de la siguiente formula:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x)f(x_i)$$

donde :

$n$  es el grado del polinomio

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

por ejemplo, para cuando  $n=1$

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^1 L_i(x)f(x_i)$$

$$f_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

$$f_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)$$

Ahora desarrollemos el polinomio para cuando  $n=2$



$$f_2(x) = \sum_{i=0}^2 L_i(x) f(x_i)$$

$$f_2(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2)$$

$$f_2(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} * \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} * \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} f(x_1)$$

$$+ \frac{(x - x_0)}{(x_2 - x_0)} * \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

### Ejemplo de aplicación práctica:

La densidad de la mermelada varía con su temperatura y la concentración de fruta, de acuerdo a la siguiente tabla:

	Temperatura (°C)			
Concentración (%)	10	30	60	100
5	1.03	1.02	1.01	0.98
20	1.14	1.13	1.11	1.08
40	1.31	1.29	1.27	1.24
70	1.69	1.60	1.57	1.54

Deseamos encontrar la densidad de la mermelada a 50°C y 60% de concentración.

Observando la tabla, encontramos que la densidad de la mermelada no se encuentra ni a esa temperatura, ni a esa concentración.

Primeramente vemos que, podemos usar los polinomios de interpolación de Lagrange para n=1.

$$f_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)$$

Primero vamos a calcular la densidad a 50°C y 40% de concentración utilizando los valores de la densidad conocidos entre 30°C y 60°C.



$$f_1(50^\circ\text{C}) = \frac{50 - 60}{30 - 60} * (1.29) + \frac{50 - 30}{60 - 30} * (1.27)$$

$$f_1(50^\circ\text{C}) = \left( \frac{-10}{-30} \right) * (1.29) + \left( \frac{20}{30} \right) * (1.27) = 0.43 + (0.846)$$

$$f_1(50^\circ\text{C}) = 1.276 \text{ (Densidad a } 50^\circ\text{C y } 40\% \text{ de concentración)}$$

Ahora vamos a calcular la densidad a 50°C y 70% de concentración, utilizando los valores de la densidad conocida entre 30°C y 60°C.

$$f_1(50^\circ\text{C}) = \frac{50 - 60}{30 - 60} * (1.6) + \frac{50 - 30}{60 - 30} * (1.57)$$

$$f_1(50^\circ\text{C}) = \left( \frac{-10}{-30} \right) * (1.6) + \left( \frac{20}{30} \right) * (1.57) = 0.533 + 1.046$$

$$f_1(50^\circ\text{C}) = 1.579 \text{ (Densidad a } 50^\circ\text{C y } 70\% \text{ de concentración)}$$

La nueva tabla que ahora tendríamos sería:

	Temperatura	50°C
Concentración (%)		
40		1.276
70		1.579

Finalmente, ahora vamos a calcular la densidad a 50°C y 60% de concentración, utilizando los valores de la densidad conocidos a 50°C entre 40% y 70% de concentración.

$$f_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)$$

$$f_1(60\%) = \frac{60\% - 70\%}{40\% - 70\%} * (1.276) + \frac{60\% - 40\%}{70\% - 40\%} * (1.579)$$

$$f_1(60\%) = \frac{-10}{-30} * (1.276) + \frac{20}{30} * (1.579)$$

$$f_1(60\%) = 0.425 + 1.052$$

$$f_1(60\%) = 1.477 \text{ (Densidad a } 50^\circ\text{C y } 60\% \text{ de concentración)}$$

### Ejemplo de aplicación práctica:

Vamos a hacer otro ejemplo de aplicación utilizando la misma tabla inicial del ejemplo de la

mermelada.

¿Cuál será la temperatura para una concentración de la mermelada de 30% y una densidad de 1.215? Primero vamos a encontrar la densidad de la mermelada para una concentración de la mermelada del 30%. Para esto vamos a usar los datos que caigan entre las temperaturas de 10°C y 30°C.

Primero lo vamos a hacer para 10°C.

$$f_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)$$

$$f_1(30\%) = \frac{30\% - 40\%}{20\% - 40\%} * (1.14) + \frac{30\% - 20\%}{40\% - 20\%} * (1.31)$$

$$f_1(30\%) = \frac{-10}{-20} * (1.14) + \frac{10}{20} * (1.31)$$

$$f_1(30\%) = 0.57 + 0.655$$

$$f_1(30\%) = 1.225 (\text{Densidad a } 30\% \text{ y } 10^\circ\text{C})$$

Ahora lo vamos a hacer para 30°C.

$$f_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)$$

$$f_1(30\%) = \frac{30\% - 40\%}{20\% - 40\%} * (1.13) + \frac{30\% - 20\%}{40\% - 20\%} * (1.29)$$

$$f_1(30\%) = \frac{-10}{-20} * (1.13) + \frac{10}{20} * (1.29)$$

$$f_1(30\%) = 0.565 + 0.645$$

$$f_1(30\%) = 1.21 (\text{Densidad a } 30\% \text{ y } 30^\circ\text{C})$$

La nueva tabla que ahora tenemos es:

Concentración (%)	Temperatura	
	10°C	30°C
30	1.225	1.21

Como nos piden la temperatura para una concentración de la mermelada de 30% y una densidad de 1.215, realizamos la interpolación correspondiente.



$$f_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)$$
$$f_1(1.215) = \frac{1.215 - 1.21}{1.225 - 1.21} * (10^{\circ}\text{C}) + \frac{1.215 - 1.225}{1.21 - 1.225} * (30^{\circ}\text{C})$$
$$f_1(1.215) = (0.333)(10) + (0.666)(30)$$
$$f_1(1.215) = 3.33 + 19.98$$
$$f_1(1.215) = 23.31^{\circ}\text{C}$$

Por lo tanto, la temperatura solicitada es igual a 23.31°C.

Ejemplo:

Para la tabla que a continuación se presenta:

<b>i</b>	<b>x<sub>i</sub></b>	<b>f(x<sub>i</sub>)</b>
0	0	-3
1	1	0
2	3	5
3	6	7

Obtenga la aproximación polinomial de Lagrange con todos los puntos. Intepole el valor de la función para x=1.8.

Solución



$$P(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left[ \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right]$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^3 L_i(x) f(x_i) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2) + L_3(x) f(x_3)$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(1.8 - 1)(1.8 - 3)(1.8 - 6)}{(0 - 1)(0 - 3)(0 - 6)} = -0.224$$

$i = 0$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(1.8 - 0)(1.8 - 3)(1.8 - 6)}{(1 - 0)(1 - 3)(1 - 6)} = 0.9072$$

$i = 1$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(1.8 - 0)(1.8 - 1)(1.8 - 6)}{(3 - 0)(3 - 1)(3 - 6)} = 0.336$$

$i = 2$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(1.8 - 0)(1.8 - 1)(1.8 - 3)}{(6 - 0)(6 - 1)(6 - 3)} = -0.0192$$

$i = 3$

$$P(x) = (-0.224)(-3) + 0.9072(0) + 0.336(5) - 0.0192(7)$$

$$P(x) = 2.2176$$

Tarea:

La densidad del carbonato neutro de potasio en solución acuosa varía con la temperatura y la concentración de acuerdo con:

Concentración (%)	0°C	Temperatura 40°C	80°C	100°C
4	1.0381	1.0276	1.0063	0.9931
12	1.1160	1.1013	1.0786	1.0663
20	1.1977	1.1801	1.1570	1.1451
28	1.2846	1.2652	1.2418	1.2301

- a) Calcular la densidad a 40°C y 15% de concentración
- b) Calcular la densidad a 50° C y 28% de concentración
- c) Calcular la densidad a 90° C y 25% de concentración
- d) Calcular la concentración a 60° C y densidad de 1.129

Procedure Lagrange (N: Byte;  $x_i$ : vector; Var Pnx: real; Var  $Lx_i$ : Vector);

```
Var
  I, J : byte;
  Lxi, x : real;
Begin
  x: 1.8; { Interpoliar el valor de la función para x= 1.8}
  Pnx:= 0;
  For I:= 0 to n do
  Begin
     $Lx_i$  [I]:=Lagrangeix (x, I, xi);
    Pnx:=Pnx+ $Lx_i$  [I]*fxi [I]
  End
End; { Fin del procedure Lagrange}
```

Function Lagrangeix (x: real; i: byte;  $x_i$ : vector: real);

```
Var
  J : byte;
  Productoria : real;
Begin
  Productoria:=1;
  For J:=0 to n do
  If J < > I
  Then
    Productoria:= Productoria * ((x-xi [J]) / (xi [I]- xi [J]));
  Lagrangeix:=Productoria
  End; { Fin de la función Lagrangeix}
```

[Regreso a la página principal.](#)



## 5.0 INTEGRALES DEFINIDAS

La antítesis del concepto de derivación es la de integración. Se realiza por primera vez una integral en el siglo XVII, a partir del problema "de las cuadraturas"; es decir del problema del cálculo de las áreas limitadas por curvas. Por ejemplo, si se desea evaluar el área de un círculo se puede trazar una circunferencia del mismo radio, ya que es la curva que limita esa área. Si se toma el círculo unitario, entonces la función quedaría:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 1 \text{ despejando } y \\y^2 &= 1 - x^2 \Rightarrow \\y &= \sqrt{1 - x^2} \text{ si } y = f(x) \Rightarrow \\f(x) &= \sqrt{1 - x^2}\end{aligned}$$

donde  $f(x)$  representaría la mitad del círculo como se muestra en la siguiente figura:



Si se divide el intervalo  $[-1, 1]$  en varios subintervalos y si se construye un rectángulo inscrito sobre cada uno de ellos.



Los números  $\Delta x_i$  miden la amplitud de cada intervalo; los valores  $f(x_i)$  indican el valor de la altura de cada rectángulo. Puede observarse que este valor coincide con el valor mínimo de la función  $f(x)$  en cada intervalo considerado. El área de cada rectángulo será igual al producto de su base por su altura, y el área total puede expresarse como la suma de las áreas de cada rectángulo :

$$A = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

La suma de todos los rectángulos no es igual al área del semicírculo. Pero se aproxima por defecto, y

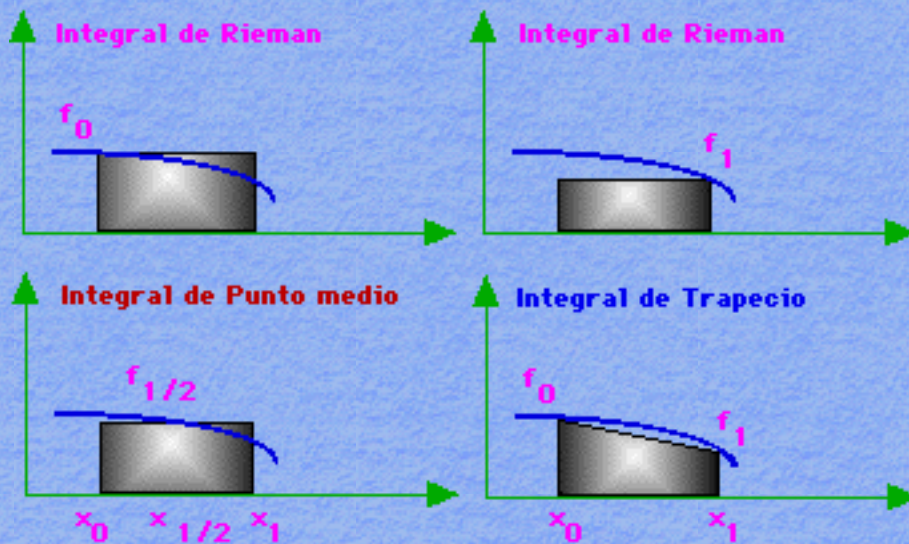


con un error tanto más pequeño cuanto mayor es el número de intervalos considerados.

Los matemáticos del siglo XVII supusieron que podían hacerse un número infinito de subintervalos y sumar el área de los rectángulos y que esta sería el área buscada. Se cambió así la notación para indicar el cálculo del área bajo la curva por esta suma infinita :

$$\int f(x)dx$$

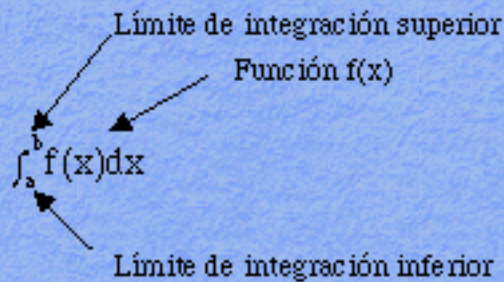
esta notación sugiere la palabra "suma" por medio de la estilización de la "s". Esta idea que data del siglo XVII, en la actualidad pareciera primitiva, sin embargo es la base de la mayoría de los métodos aproximados para evaluar integrales en forma numérica. Existen otras formas de construir rectángulos, como se muestra a continuación:



[Regreso a la página principal](#)

## 5.1 La Regla Rectangular, Trapezoidal y de Simpson

Se encontrará la integral definida de una función  $f(x)$ , a través de métodos numéricos. Es decir, cuando hablamos de una integral definida, nos referimos a que conocemos los límites de integración.



Muchas veces lo que se hace es aproximar  $f(x)$  a un polinomio de grado  $n$ , porque a menudo es necesario evaluar la integral definida de una función a la cual no se le conoce el valor exacto de la integral (en otras palabras, no se conoce explícitamente la integral, o no es fácil de obtener).

[Regreso a la página principal](#)

### 5.1.1 Regla del Trapecio

En la regla del Trapecio lo que se hace es aproximar la función  $f(x)$  con un polinomio de grado 1, es decir con una recta.

Para esto empleamos el polinomio de interpolación de Newton-Lagrange o de Diferencias Divididas de grado 1, es decir, una recta.

$$f(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$$

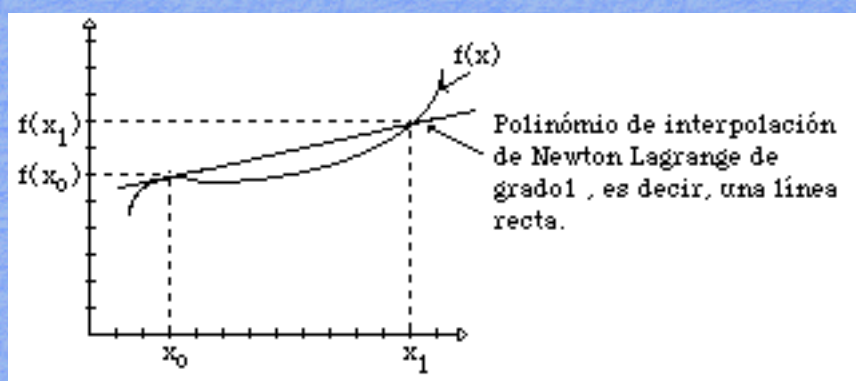


Figura 5.1.- Figura del Polinomio de interpolación de Newton Lagrange

Normalmente la nomenclatura que se emplea en los libros, cuando se presenta el método del



Trapecio es llamar al límite inferior a y el límite superior b. Gráficamente , esto quedaría como:

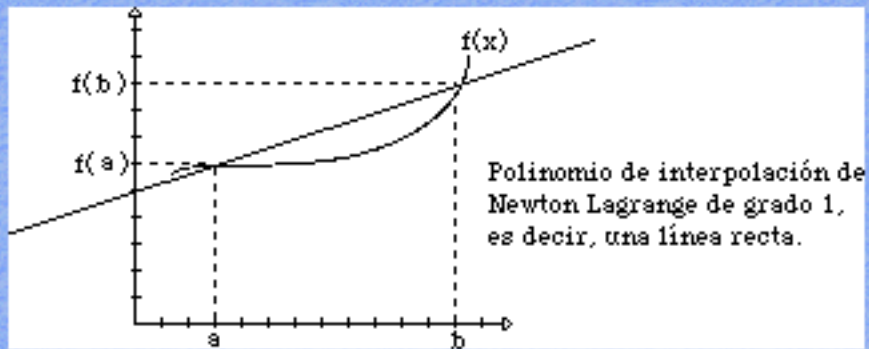


Figura 5.2.- Figura del Polinomio de interpolación de Newton Lagrange con nomenclatura.

$$f(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a)$$

Sustituyendo esta aproximación en la integral:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Tendremos:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right] dx \\ \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x - a \left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) + f(a) \right] dx \\ \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{-af(b) + af(a)}{b - a} + f(a) \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{-af(b) + af(a) + (b - a)f(a)}{b - a} \right] dx \\ \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{-af(b) + af(a) + bf(a) - af(a)}{b - a} \right] dx \\ \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{-af(b) + bf(a)}{b - a} \right] dx \\ \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x dx + \int_a^b \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} dx \end{aligned}$$

Realizando las dos integrales:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_a^b + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} (x) \Big|_a^b$$



Aplicando los límites de integración:

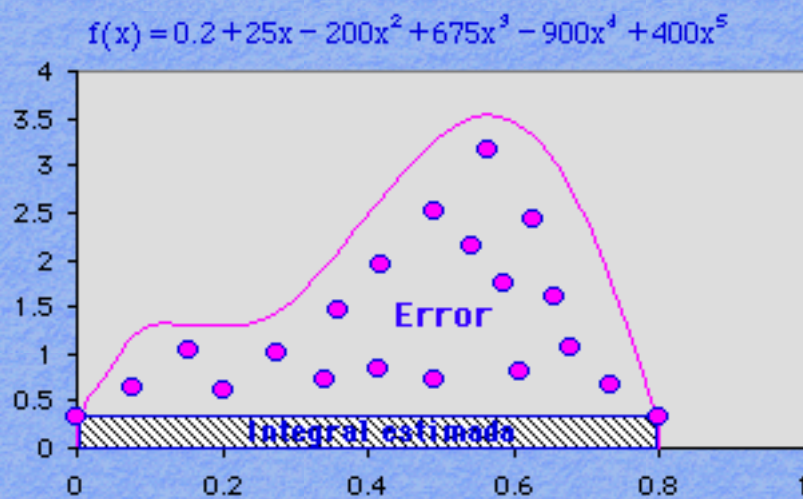
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left( \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} (b - a) \\ \int_a^b f(x) dx &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{(b^2 - a^2)}{2} + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} (b - a) \\ \int_a^b f(x) dx &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{(b + a)(b - a)}{2} + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} (b - a) \\ \int_a^b f(x) dx &= \frac{f(b) - f(a)}{2} (b + a) + bf(a) - af(b) \\ \int_a^b f(x) dx &= \left( \frac{f(b) - f(a)}{2} \right) b + \left( \frac{f(b) - f(a)}{2} \right) a + bf(a) - af(b) \\ \int_a^b f(x) dx &= \frac{bf(b) - bf(a)}{2} + \frac{af(b) - af(a)}{2} + bf(a) - af(b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \frac{bf(b)}{2} - \frac{bf(a)}{2} + \frac{af(b)}{2} - \frac{af(a)}{2} + bf(a) - af(b) \\ \int_a^b f(x) dx &= f(b) \left[ \frac{b}{2} + \frac{a}{2} - a \right] + f(a) \left[ -\frac{b}{2} - \frac{a}{2} + b \right] \\ \int_a^b f(x) dx &= f(b) \left[ \frac{b}{2} - \frac{a}{2} \right] + f(a) \left[ -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right] \\ \int_a^b f(x) dx &= \frac{f(b)}{2} [b - a] + \frac{f(a)}{2} [b - a] \\ \therefore \int_a^b f(x) dx &= (b - a) \left[ \frac{f(b) + f(a)}{2} \right]\end{aligned}$$

Esta última es la "Ecuación del Trapecio".

## Error de la regla trapezoidal

Cuando empleamos la integral bajo un segmento de línea recta para aproximar la integral bajo una curva, obviamente podemos incurrir en un error que puede ser sustancial, como se muestra en la siguiente figura:



Una estimación para calcular el error en la regla del trapecio, es usando la siguiente ecuación:

$$\text{Error} = \frac{-(b-a)^3}{12} f''(x)$$

Segunda derivada

donde  $x$  está en algún lugar en el intervalo de " $a$ " a " $b$ ". La ecuación de Error indica que si la función sujeta a integración es lineal, la regla trapezoidal será exacta. De otra manera, para funciones con derivadas de segundo orden y superior (es decir, con curvatura), puede ocurrir algún error.

Ejercicio:

Calcular:

$$\int_0^{0.8} [0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5] dx$$

por el método del Trapecio.

$$a=0$$

$$b=0.8$$

$$f(x)=0.2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5$$

$$f(a)=f(0)=0.2+25(0)-200(0)^2+675(0)^3-900(0)^4+400(0)^5$$

$$f(a)=0.2$$

$$f(b)=f(0.8)=0.2+25(0.8)-200(0.8)^2+675(0.8)^3-900(0.8)^4+400(0.8)^5$$

$$f(b)=0.232$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_0^{0.8} [0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5] dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} [f(b) + f(a)]$$

$$\int_a^b f(x) dx = \left[ \frac{0.8-0}{2} \right] [0.232 + 0.2]$$

$$\int_a^b f(x) dx = 0.1728$$

[Regreso a la página principal](#)

### 5.1.1.1 Regla del Trapecio Compuesto

Aplicando propiedades de la integral, vamos a dividir el intervalo en dos intervalos iguales.

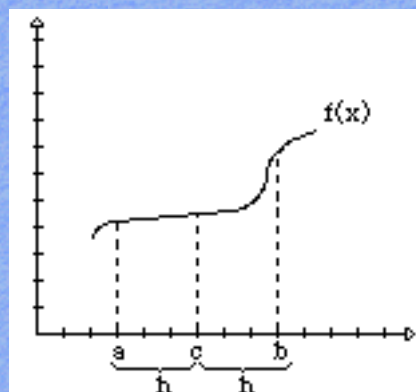


Figura 5.3.- Intervalo en dos partes iguales.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

si aplicamos para cada integral la regla del Trapecio:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{c-a}{2} [f(c) + f(a)] + \frac{b-c}{2} [f(b) + f(c)]$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(c) + f(a)] + \frac{h}{2} [f(b) + f(c)]$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(c) + f(a) + f(b) + f(c)]$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(a) + 2f(c) + f(b)]$$

Este mismo resultado lo podríamos expresar con x's en lugar de letras como a, b y c.



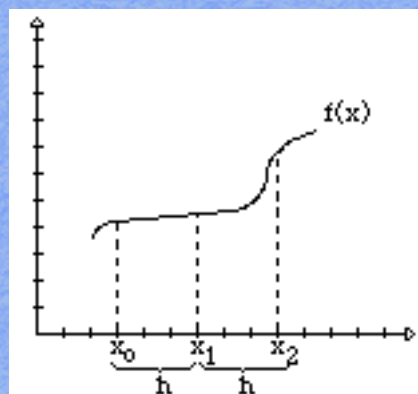


Figura 5.4.- Denotación de los intervalos

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

de manera tal que:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)]$$

Para el caso en que dividiéramos el intervalo  $a, b$  en tres subintervalos iguales y cambiando en lugar de usar letras, usar las  $x$ 's correspondientes:

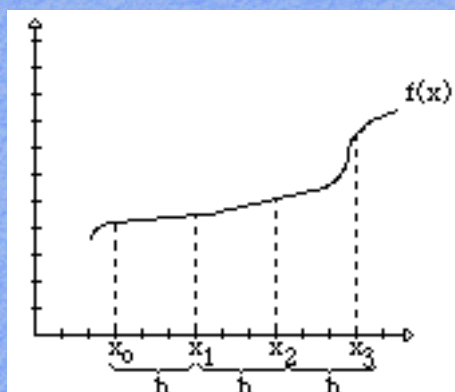


Figura 5.5.- Intervalo en tres partes iguales

Entonces tendríamos:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx$$

Si aplicamos para cada integral la regla del Trapecio:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{x_1 - x_0}{2} [f(x_1) + f(x_0)] + \frac{x_2 - x_1}{2} [f(x_2) + f(x_1)] + \frac{x_3 - x_2}{2} [f(x_3) + f(x_2)]$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_1) + f(x_0)] + \frac{h}{2} [f(x_2) + f(x_1)] + \frac{h}{2} [f(x_3) + f(x_2)]$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_1) + f(x_0) + f(x_2) + f(x_1) + f(x_3) + f(x_2)]$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + f(x_3)]$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2\{f(x_1) + f(x_2)\} + f(x_3)]$$

Generalizando este resultado, podríamos escribirlo como:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] \quad \text{Regla del Trapecio Compuesto}$$

Donde  $n$  representa el número de divisiones en las cuales hemos fraccionado el intervalo  $x_0, x_n$ .

Gráficamente, esto sería igual a:

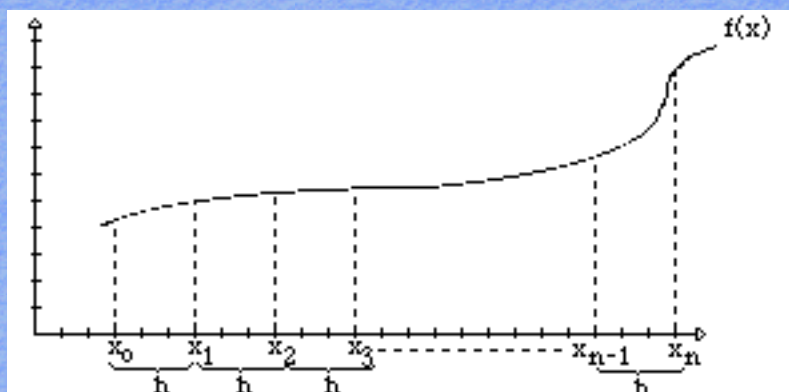


Figura 5.6.- Intervalo en partes fraccionarias.

El valor de  $h$  en la ecuación anterior, se puede obtener fácilmente a partir de la ecuación:

$$h = \frac{b - a}{n}$$

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

Ejercicios:

Dados los pares de valores, calcular la integral  $\int_0^{12} f(x) dx$

**x**

**f(x)**



0	10
0.1	6.84
0.3	4
0.5	4.2
0.7	5.51
0.95	5.77
1.2	1.0

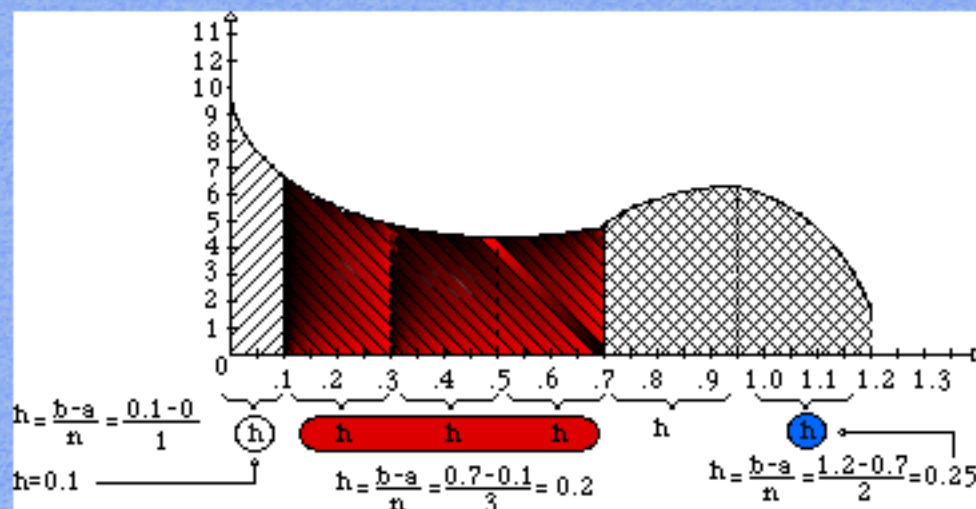


Figura 5.7.- Descripción del intervalo en partes fraccionarias.

Como se observa en la figura anterior, para aplicar al regla del Trapecio, necesitamos tener intervalos iguales  $h$ . Sin embargo los datos que nos dan no se encuentran todos ellos a intervalos iguales. Por lo tanto para aplicar la regla del trapecio, primero identificamos cuales tramos de la gráfica tienen intervalos iguales, y después realizamos integrales separadas para cada tramo, con la ecuación apropiada de la regla del trapecio en cada caso. Finalmente sumamos los resultados obtenidos para cada integral.

Empezamos con la primera parte, la integral de 0 a 0.1.

$$\int_0^{0.1} f(x) dx = \frac{b-a}{2} [f(b) + f(a)] = \frac{0.1-0}{2} [f(0.1) + f(0)]$$

$$\int_0^{0.1} f(x) dx = \frac{0.1}{2} [6.84 + 10] = 0.842$$

Ahora hagamos la segunda integral: (Regla del Trapecio)

$$\int_0^{0.7} f(x) dx = \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$n$  = número de divisiones o de trapecios=3



$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.7-0.10}{3} = 0.2$$

$$\int_{0.1}^{0.7} f(x) dx = \frac{0.2}{2} [f(0.1) + 2\{f(0.3) + f(0.5)\} + f(0.7)]$$

$$\int_{0.1}^{0.7} f(x) dx = 0.1[6.84 + 2\{4 + 4.2\} + 5.51]$$

$$\int_{0.1}^{0.7} f(x) dx = 0.1[6.84 + (2)(8.2) + 5.51] = 0.1(6.84 + 16.4 + 5.51)$$

$$\int_{0.1}^{0.7} f(x) dx = 0.1(28.75)$$

$$\int_{0.1}^{0.7} f(x) dx = 2.875$$

Ahora hagamos la tercera integral (Regla del trapecio compuesto)

$$\int_{0.7}^{1.2} f(x) dx = \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

n = número de divisiones o de trapecios=2

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1.2-0.7}{2} = 0.25$$

$$\int_{0.7}^{1.2} f(x) dx = \frac{0.25}{2} [f(0.7) + 2\{f(0.95)\} + f(1.2)]$$

$$\int_{0.7}^{1.2} f(x) dx = 0.125[5.51 + 2\{5.77\} + 1.0]$$

$$\int_{0.7}^{1.2} f(x) dx = 0.125[5.51 + 11.54 + 1.0]$$

$$\int_{0.7}^{1.2} f(x) dx = 0.125(18.05)$$

$$\int_{0.7}^{1.2} f(x) dx = 2.25625$$

$$\int_0^{1.2} f(x) dx = \int_0^{0.1} f(x) dx + \int_{0.1}^{0.7} f(x) dx + \int_{0.7}^{1.2} f(x) dx$$

$$\int_0^{1.2} f(x) dx = 0.842 + 2.875 + 2.25625$$

$$\int_0^{1.2} f(x) dx = 5.97325$$

Ejercicio:

Usando el método del Trapecio Compuesto. Encontrar el valor de la siguiente doble integral.

$$\int_{-2}^2 \int_0^4 (x^3 - 3y^2 + xy^3) dx dy$$

utilice n=2

Primero debemos de resolver la integral con respecto a x, y después la integral con respecto a y.

$$\int_0^4 (x^3 - 3y^2 + xy^3) dx$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{2} = 2$$

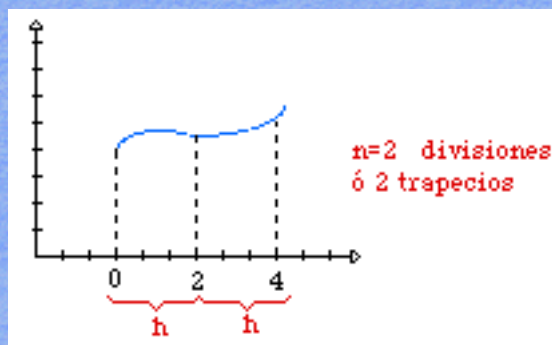


Figura 5.8.- Descripción de la integración con respecto x

$$\int_0^4 f(x) dx = \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Al inicio del problema no nos dicen cuanto vale  $x_0$ ,  $x_1$  y  $x_2$ , sin embargo nos dan el intervalo de la integral, que va desde 0 a 4 y nos dicen que  $n=2$   $\therefore$

$x_0=0$ ;  $x_1=2$  ;  $x_2=4$ .

$$\int_0^4 f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2\{f(x_1)\} + f(x_2)]$$

para( $x_0$ )

$$f(x_0) = x_0^3 - 3y^2 + x_0 y^3$$

para( $x_0 = 0$ )

$$f(x_0) = 0^3 - 3y^2 + 0(y^3) \Rightarrow f(x_0) = -3y^2$$

para( $x_1$ )

$$f(x_1) = x_1^3 - 3y^2 + x_1 y^3$$

para( $x_1 = 2$ )

$$f(x_1) = 2^3 - 3y^2 + 2(y^3) \Rightarrow f(x_1) = 8 - 3y^2 + 2y^3$$

para( $x_2$ )

$$f(x_2) = x_2^3 - 3y^2 + x_2 y^3$$

para( $x_2 = 4$ )

$$f(x_2) = 4^3 - 3y^2 + 4(y^3) \Rightarrow f(x_2) = 64 - 3y^2 + 4y^3$$

$$\therefore \int_0^4 f(x) dx = \frac{2}{2} \left[ -3y^2 + 2\{8 - 3y^2 + 2y^3\} + 64 - 3y^2 + 4y^3 \right]$$

$$\int_0^4 f(x) dx = -3y^2 + 16 - 6y^2 + 4y^3 + 64 - 3y^2 + 4y^3$$

$$\int_0^4 f(x) dx = -3y^2 - 6y^2 - 3y^2 + 16 + 64 + 4y^3 + 4y^3$$

$$\int_0^4 f(x) dx = -12y^2 + 80 + 8y^3$$

$$\therefore \int_0^4 f(x) dx = 8y^3 - 12y^2 + 80$$

Ahora, tenemos que resolver la segunda integral:

$$\int_{-2}^2 (8y^3 - 12y^2 + 80) dy$$

como sabemos que  $n=2$ , procedemos a calcular  $h$ .

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - (-2)}{2} = 2$$

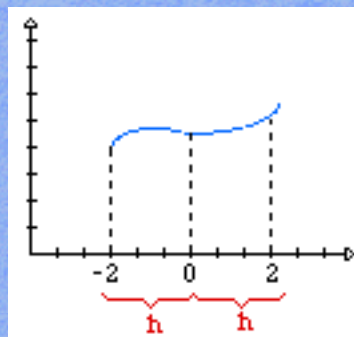


Figura 5.9.- Descripción de la integración con respecto  $y$

Nuevamente al inicio del problema no nos dicen cuanto vale  $y_0$ ,  $y_1$  y  $y_2$ , sin embargo nos dan el intervalo de la integral, que va desde -2 a 2 y nos dicen que  $n=2$ .

$\therefore y_0 = -2$ ;  $y_1 = 0$  y  $y_2 = 2$ .



$$\therefore \int_{-2}^2 f(y) dy = \frac{h}{2} \left[ f(y_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(y_i) + f(y_n) \right]$$

$$\int_{-2}^2 f(y) dy = \frac{h}{2} [f(y_0) + 2f(y_1) + f(y_2)]$$

para( $y_0$ )

$$f(y_0) = 8y_0^3 - 12y_0^2 + 80$$

para( $y_0 = -2$ )

$$f(y_0) = 8(-2)^3 - 12(-2)^2 + 80$$

$$f(y_0) = 8(-8) - 12(4) + 80 = -64 - 48 + 80 = -112 + 80 \Rightarrow f(y_0) = -32$$

para( $y_1$ )

$$f(y_1) = 8y_1^3 - 12y_1^2 + 80$$

para( $y_1 = 0$ )

$$f(y_1) = 8(0)^3 - 12(0)^2 + 80$$

$$f(y_1) = 8(0) - 12(0) + 80 = 80 \Rightarrow f(y_1) = 80$$

para( $y_2$ )

$$f(y_2) = 8y_2^3 - 12y_2^2 + 80$$

para( $y_2 = 2$ )

$$f(y_2) = 8(2)^3 - 12(2)^2 + 80$$

$$f(y_2) = 8(8) - 12(4) + 80 = 64 - 48 + 80 = 144 - 48 \Rightarrow f(y_2) = 96$$

$$\int_{-2}^2 f(y) dy = \frac{h}{2} [f(y_0) + 2f(y_1) + f(y_2)]$$

$$\int_{-2}^2 f(y) dy = \frac{2}{2} [-32 + 2(80) + 96]$$

$$\int_{-2}^2 f(y) dy = 1[-32 + 160 + 96] = 160 + 64$$

$$\int_{-2}^2 f(y) dy = 224$$

$$\therefore \int_{-2}^2 \int_0^4 (x^3 - 3y^2 + xy^3) dx dy = 224$$

A continuación se presenta el diagrama de flujo del Trapecio simple y el Trapecio compuesto.

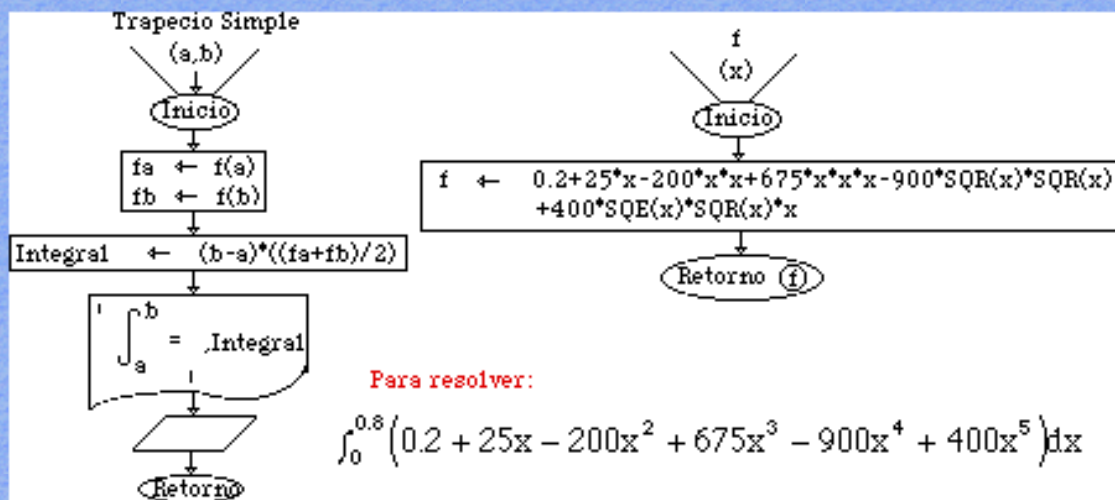


Figura 5.10.- Diagramas de flujo de programa principal de trapezio compuesto y la función

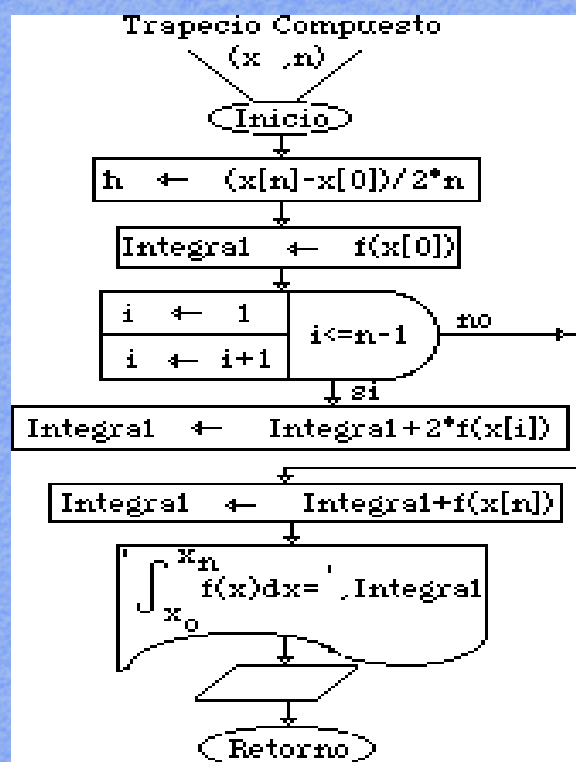


Figura 5.11.- Diagrama de Flujo del Método Trapecio Compuesto

[Regreso a la página principal.](#)

### 5.1.2 Regla de Simpson de 1/3 simple

La regla de Simpson de 1/3, lo que hace es que con 3 puntos conocidos  $\{x_0, f(x_0)\}$ ,  $\{x_1, f(x_1)\}$ ,  $y \{x_2, f(x_2)\}$ , aproxima a la función que se desea integrar.

Primero vamos a ver la regla de Simpson 1/3 para cuando tenemos 2 intervalos, es decir, que tenemos 3 puntos conocidos.

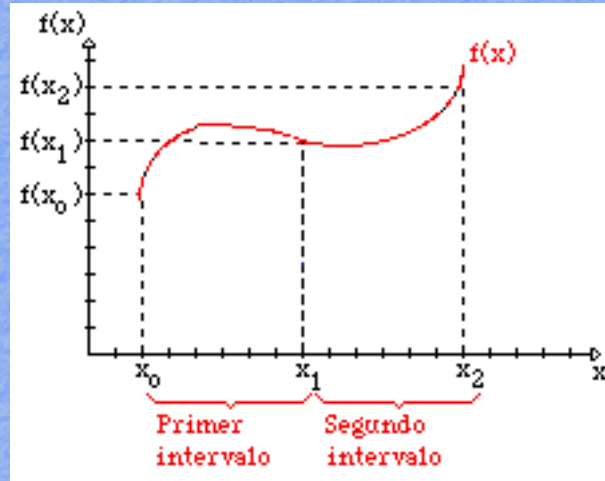


Figura 5.12.- 2 intervalos

La regla de Simpson 1/3 resulta de integrar el polinomio de Lagrange de segundo grado sobre  $[x_0, x_2]$ . Recordemos que cuando se tienen 3 puntos el polinomio es una parábola.

Por lo tanto:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} \left[ \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \right] dx$$

Obteniendo la regla de Simpson de esta manera, se obtiene un término de error que contiene a  $f^{(3)}$ , es decir la tercera derivada de la función. Enfocando el problema de otra manera se puede derivar un término de orden mayor que contenga a  $f^{(4)}$ , (cuarta derivada de la función). Esto se puede obtener si  $f$  se desarrolla en un polinomio de Taylor de Tercer grado alrededor de  $x_1$ . Entonces, para cada  $x$  en  $[x_0, x_2]$ , existe un número  $\xi(x)$  en  $(x_0, x_2)$  tal que:

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x - x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{6}(x - x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x - x_1)^4$$

Después de la integración y manejo algebraico de esta función entre  $x_0$  y  $x_2$ , se obtiene la regla de Simpson 1/3 simple

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

donde:  $h = (b - a)/n$ , pero para Simpson 1/3 se tiene que  $n = 2$  por lo tanto  $h = (b - a)/2$



con un error de  $-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$

Donde  $\xi$  está en algún lugar en el intervalo desde "a" a "b". Así la regla de Simpson 1/3 es más exacta que la regla trapezoidal. Sin embargo, en comparación con la ecuación anterior, indica que es más exacta de lo esperado. En lugar de ser proporcional a la tercera derivada, el error es proporcional a la cuarta derivada. Esto es porque, el término del coeficiente de tercer orden va a cero durante la integración de la interpolación polinomial. En consecuencia, la regla de Simpson 1/3 tiene una precisión de tercer orden aun cuando se base en sólo tres puntos.

Es decir, como el término de error involucra a la cuarta derivada de f, la regla de Simpson 1/3 dará el resultado exacto cuando se aplique a cualquier polinomio de grado menor que cuatro. ! En otras palabras, da resultados exactos para polinomios cúbicos aun cuando se derive de una parábola!

Para poder calcular un valor numérico de la cuarta derivada necesitamos conocer el valor numérico de x. En lugar de esto, lo que se puede hacer es calcular la media de la cuarta derivada. La media de la cuarta derivada, se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Media de la cuarta derivada} = \frac{f'''(b) - f'''(a)}{b - a}$$

Ejercicio:

Calcular  $\int_0^1 (15.3)^{25x} dx$

Utilizando la regla de Simpson de 1/3 simple.

Solución:

Sabemos que n=2

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$h = 0.5$$

$$f(x) = (15.3)^{25x}$$

	<b>x</b>	<b>f(x)</b>
0	0	1
1	0.5	30.26
2	1	915.65

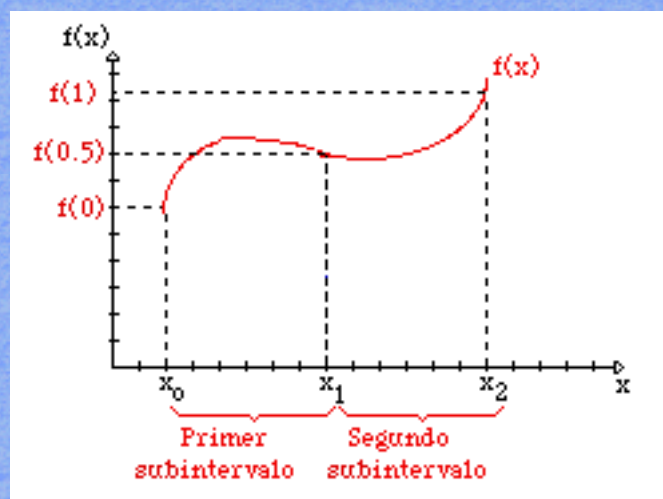


Figura 5.13.- Partición en subintervalos

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^1 (15.3)^{2.5x} dx &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] = \frac{0.5}{3} [1 + 4(30.26) + 915.65] \\ \int_0^1 (15.3)^{2.5x} dx &= 0.1666 [1 + 121.04 + 915.65] = 0.1666 (1037.69) \\ \int_0^1 (15.3)^{2.5x} dx &= 172.87\end{aligned}$$

Calculemos ahora el término de error.

$$-\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \text{ recordando que la derivada de } \frac{d}{dx} a^v = a^v \ln a \frac{dv}{dx}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= (15.3)^{2.5x} \\ f'(x) &= (15.3)^{2.5x} \ln 15.3 \frac{d}{dx} (2.5x) = (15.3)^{2.5x} \ln(15.3)(2.5) \frac{dx}{dx}; \text{ donde } \Rightarrow \left[ \frac{dx}{dx} = 1 \right] \\ f''(x) &= 2.5 \ln 15.3 [(15.3)^{2.5x} \ln(15.3)(2.5)]; \\ f''(x) &= 6.81 [(15.3)^{2.5x} \ln(15.3)(2.5)]; \\ f''(x) &= 46.37 (15.3)^{2.5x} \\ f'''(x) &= 46.37 [(15.3)^{2.5x} \ln(15.3)(2.5)]; \\ f'''(x) &= 315.78 (15.3)^{2.5x} \\ f^{iv}(x) &= 315.78 [(15.3)^{2.5x} \ln(15.3)(2.5)]; \\ f^{iv}(x) &= 2150.46 (15.3)^{2.5x}\end{aligned}$$

Se calcula un valor numérico de la cuarta derivada auxiliándose de la cuarta derivada.

$$\text{Media de la cuarta derivada} = \frac{f^{iv}(b) - f^{iv}(a)}{b - a}$$

Donde  $x_1 = a$  y  $x_0 = b$  son los límites inferior y superior de la integral, es decir:



$$\text{Media de la cuarta derivada} = \frac{f''''(x_2) - f''''(x_0)}{x_2 - x_0}$$

Para este ejemplo la media de la cuarta derivada sería:

$$\begin{aligned} \text{Media de la cuarta derivada} &= \frac{315.78(15.3)^{2.5(1)} - 315.78(15.3)^{2.5(0)}}{1 - 0} = \\ &= \frac{(315.78)(915.64) - 315.78}{1} = \frac{289140.79 - 315.78}{1} \end{aligned}$$

$$\text{Media de la cuarta derivada} = 288825.01$$

Por lo tanto, el error será:

$$-\frac{h^5}{90}(288825.01) = -\frac{(0.5)^5}{90}(288825.01)$$

$$\text{Error} = -100.28$$

El valor exacto de la integral, se puede obtener a partir de la siguiente fórmula para integración:

$$\begin{aligned} \int b^{ax} dx &= \frac{b^{ax}}{a \ln b} + c \\ \int_0^1 (15.3)^{2.5x} dx &= \frac{(15.3)^{2.5x}}{2.5 \ln(15.3)} \Big|_0^1 = \frac{1}{2.5 \ln(15.3)} \{ (15.3)^{2.5x} - (15.3)^0 \} \\ \int_0^1 (15.3)^{2.5x} dx &= \frac{1}{6.81} \{ 915.64 - 1 \} \\ \int_0^1 (15.3)^{2.5x} dx &= 134.3 \end{aligned}$$

¡Que es el valor exacto!

El valor aproximado por la regla de Simpson 1/3 simple, considerando el error sería:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (15.3)^{2.5x} dx &= 172.87 - 100.28 \\ \int_0^1 (15.3)^{2.5x} dx &= 72.59 \end{aligned}$$

que es el valor aproximado por la regla de Simpson de 1/3 Simple

$$\therefore \left| \frac{\text{Valor\_Exacto} - \text{Valor\_Aproximado}}{\text{Valor\_Exacto}} \right| * 100 = \left| \frac{134.3 - 72.59}{134.3} \right| * 100 = 45.9\%$$

Ejercicio:

Calcular la integral  $\int_0^{4\pi} (4 + 2\sin x) dx$  por la regla de Simpson de 1/3 simple. Recordemos que debemos tener 2 subintervalos  $\therefore$ .



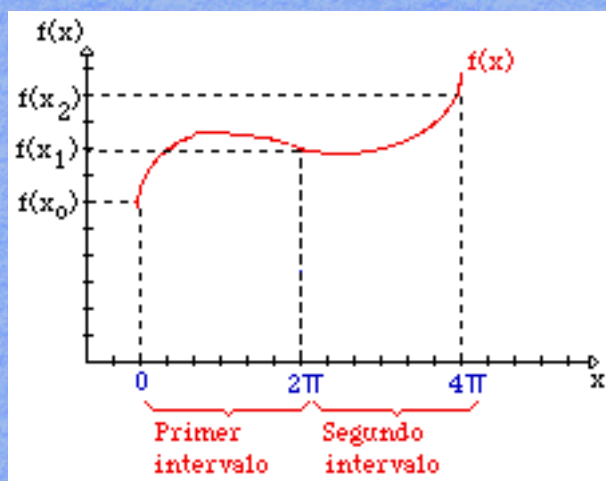


Figura 5.14.- Segmento en dos intervalos

Calculemos:

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{x_2 - x_0}{n}$$

$$h = \frac{4\pi - 0}{2} = 2\pi$$

i	xi	f(x)=4+2senx
0	0	4+2sen0=4+2(0)=4
1	2π	4+2sen2π =4+2(0)=4
2	4π	4+2sen4π =4+2(0)=4

$$\int_0^{4\pi} (4 + 2\text{sen}x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$\int_0^{4\pi} (4 + 2\text{sen}x) dx = \frac{2\pi}{3} [4 + 4(4) + 4]$$

$$\int_0^{4\pi} (4 + 2\text{sen}x) dx = \frac{2\pi}{3} (24)$$

$$\int_0^{4\pi} (4 + 2\text{sen}x) dx = 16\pi$$

Ahora vamos a calcular el error:

$$f(x) = 4 + 2\text{sen}x$$

$$f'(x) = 2\cos x$$

$$f''(x) = -2\text{sen}x$$

$$f'''(x) = -2\cos x$$

Utilizando la media de la cuarta derivada:

$$\text{Media de la cuarta derivada} = \frac{f''''(x_2) - f''''(x_0)}{x_2 - x_0} = \frac{-2 \cos(4\pi) - (-2 \cos 0)}{4\pi} =$$

$$\text{Media de la cuarta derivada} = \frac{-2(1) - [-2(1)]}{4\pi - 0} = \frac{-2 + 2}{4\pi} = 0$$

Media de la cuarta derivada = 0

Por lo tanto el error será:

$$-\frac{h^5}{90}(0) \Rightarrow \text{Error} = 0$$

El valor exacto de la integral, se puede obtener a partir de la siguiente fórmula para integración:

$$\begin{aligned} \int_0^{4\pi} (4 + 2\sin x) dx &= \int_0^{4\pi} 4 dx + \int_0^{4\pi} 2\sin x dx = 4 \int_0^{4\pi} dx + 2 \int_0^{4\pi} \sin x dx \\ &= 4(4\pi - 0) + 2(-\cos x) \Big|_0^{4\pi} = 16\pi + 2[-\cos 4\pi - (-\cos 0)] \\ &= 16\pi + 2[-1 - (-1)] = 16\pi + 2(-1 + 1) = 16\pi + 2(0) \\ \therefore \int_0^{4\pi} (4 + 2\sin x) dx &= 16\pi \end{aligned}$$

Coincide el valor exacto con el valor aproximado, lo cual demuestra que efectivamente el error debe de ser cero.

[Regreso a la página principal](#)

### 5.1.2.1 Simpson 1/3 Compuesto

La regla de Simpson se puede utilizar para realizar integrales cuyos subintervalos no necesariamente sean 2.

Por ejemplo:

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \int_{x_4}^{x_6} f(x) dx$$

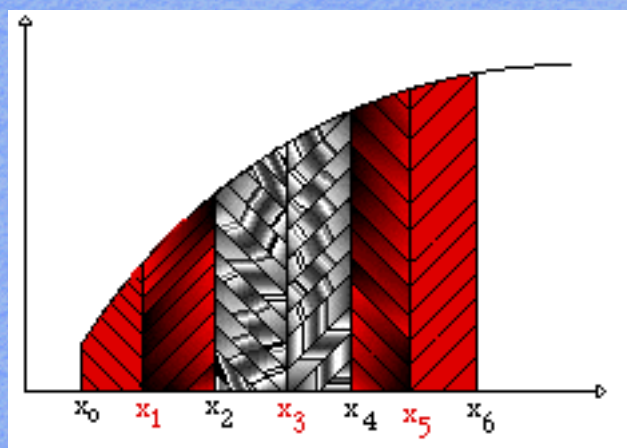


Figura 5.15.- Subintervalos de integración

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \\
 \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx &= \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] \\
 \int_{x_4}^{x_6} f(x) dx &= \frac{h}{3} [f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] \\
 \int_{x_0}^{x_6} f(x) dx &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) + \\
 &\quad + f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] \\
 \int_{x_0}^{x_6} f(x) dx &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 4f(x_3) + 4f(x_5) + 2f(x_2) + 2f(x_4) + f(x_6)] \\
 \int_{x_0}^{x_6} f(x) dx &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4[f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)] + 2[f(x_2) + f(x_4)] + f(x_6)] \\
 \therefore \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx &= \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \Delta=2 \\ i=\text{impar}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{j=2 \\ \Delta=2 \\ j=\text{par}}}^{n-2} f(x_j) + f(x_n) \right]
 \end{aligned}$$

Que es la regla de Simpson 1/3 Compuesto

Ejercicio:

Calcular  $\int_0^4 x e^{2x} dx$

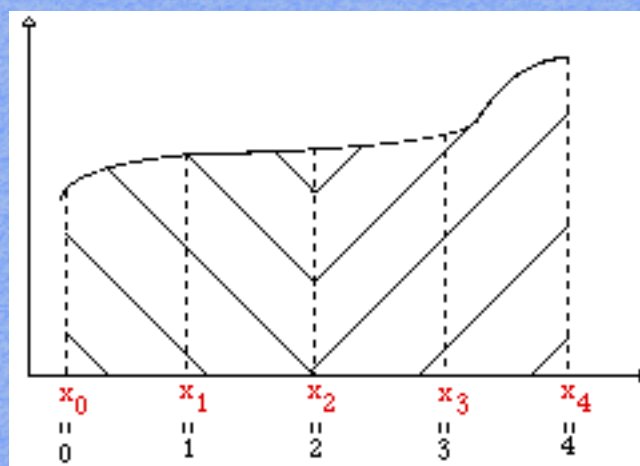


Figura 5.16.- Partición de subintervalos

$$f(x) = x e^{2x}$$



$$x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0e^{2(0)} = 0e^0 = 0(1) \Rightarrow f(x_0) = 0$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow f(x_1) = 1e^{2(1)} = 1e^2 = 1(7.389056099) \Rightarrow f(x_1) = 7.389056099$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow f(x_2) = 109.47$$

$$x_3 = 3 \Rightarrow f(x_3) = 1210.28$$

$$x_4 = 4 \Rightarrow f(x_4) = 11923.83$$

$$h = \frac{2-0}{2} = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$n = 2$  porque son 2 veces Simpson 1/3 simple

$$\therefore \int_0^4 xe^{2x} dx = \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \Delta=2 \\ i=\text{impar}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{j=2 \\ \Delta=2 \\ j=\text{par}}}^{n-2} f(x_j) + f(x_n) \right]$$

$$\int_0^4 xe^{2x} dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4[f(x_1) + f(x_3)] + 2[f(x_2) + f(x_4)]]$$

$$\int_0^4 xe^{2x} dx = \frac{h}{3} [0 + 4[7.39 + 1210.28] + 2[109.47] + 11923.83]$$

$$\int_0^4 xe^{2x} dx = \frac{1}{3} [0 + 4[1217.67] + 218.94 + 11923.83]$$

$$\int_0^4 xe^{2x} dx = \frac{1}{3} [0 + 4870.68 + 218.94 + 11923.83]$$

$$\int_0^4 xe^{2x} dx = \frac{1}{3} (17013.45) = 5671.15$$

$$\int_0^4 xe^{2x} dx = 5671.15$$

Calculemos ahora el error:

$$-\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

En lugar de  $f^4(\xi)$  se calcula la media de la cuarta derivada.

$$\text{Media de la cuarta derivada} = \frac{f^{(4)}(b) - f^{(4)}(a)}{b - a}$$

$$f(x) = xe^{2x}$$

$$f'(x) = xe^{2x} \frac{d}{dx}(2x) + e^{2x} \frac{dx}{dx} = xe^{2x}(2) + e^{2x}(1)$$

$$f'(x) = 2xe^{2x} + e^{2x}$$

$$f''(x) = 2 \frac{d}{dx}[xe^{2x}] + e^{2x} \frac{d}{dx}(2x)$$

$$f''(x) = 2[2xe^{2x} + e^{2x}] + e^{2x}(2)$$

$$f''(x) = 4xe^{2x} + 4e^{2x}$$

$$f'''(x) = 4 \frac{d}{dx}[xe^{2x}] + 4 \frac{d}{dx}[e^{2x}]$$

$$f'''(x) = 4[2xe^{2x} + e^{2x}] + 4[e^{2x} \frac{d}{dx}(2x)]$$

$$f'''(x) = 8xe^{2x} + 4e^{2x} + 4(e^{2x}[2]) = 8xe^{2x} + 4e^{2x} + 8e^{2x} = 8xe^{2x} + 12e^{2x}$$

$$\begin{aligned} \text{Media de la cuarta derivada} &= \frac{(8xe^{2x} + 12e^{2x})_b - (8xe^{2x} + 12e^{2x})_a}{b - a} \\ &= \frac{8(4)e^{2 \cdot (4)} + 12e^{2 \cdot (4)} - (8 \cdot (0) \cdot e^{2 \cdot (0)} + 12e^{2 \cdot (0)})}{4 - 0} \\ &= \frac{32e^8 + 12e^8 - (0 + 12e^0)}{4 - 0} = \frac{131162.15 - 12}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Media de la cuarta derivada} = 32787.53$$

$$\text{Error} = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

$$\text{Error} = -\frac{h^5}{90} [\text{Media\_de\_la\_cuarta\_derivada}]$$

$$\text{Error} = -\frac{(1)^5}{90} [32787.53]$$

$$\text{Error} = -728.61$$

Ejercicio:

Encontrar por el método de Simpson 1/3 Compuesto la integral  $\int_{-1}^3 f(x)dx$  a partir de los datos que se dan en la siguiente tabla:

	<b>x<sub>0</sub></b>	<b>x<sub>1</sub></b>	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>x<sub>3</sub></b>	<b>x<sub>4</sub></b>
x	-1	0	1	2	3

f(x)	8	10	10	20	76
	a				b

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=1}^{n-2} f(x_j) + f(x_n) \right]$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4[f(x_1) + f(x_3)] + 2[f(x_2)] + f(x_4)]$$

$$h = \frac{1 - (-1)}{2} = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

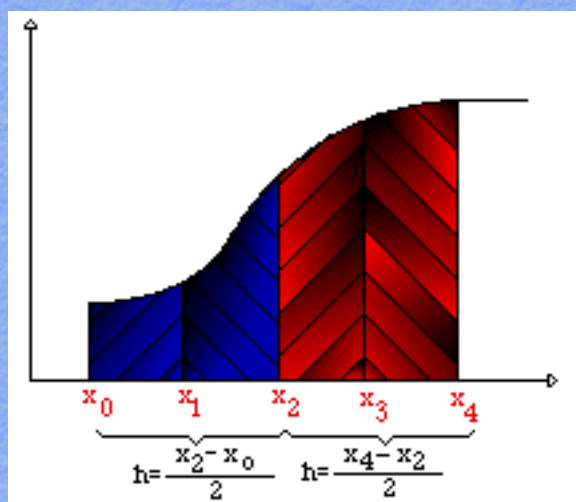


Figura 5.17.- Localización de h

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = \frac{1}{3} [8 + 4(10 + 20) + 2(10) + 76]$$

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = 74.56$$

Ejemplo:

Resolver la siguiente doble derivada por el método de Simpson 1/3

$$\int_{-2}^2 \int_0^4 (x^3 - 3y^2 + xy^3) dx dy \Big|_{n=2}$$

primero se resuelve la integral que se expresa así:

$$\int_0^4 (x^3 - 3y^2 + xy^3) dx$$

$$h = \frac{b - a}{2} = \frac{4 - 0}{2} = 2$$

$$h = 2$$

x	f(x)
0	-3y <sup>2</sup>



2	$2y^3 - 3y^2 + 8$
4	$4y^3 - 3y^2 + 64$

$$f(x) = f(0) = 0^3 - 3y^2 + 0(y^3) \\ = -3y^2$$

$$f(2) = 2^3 - 3y^2 + (2)(y^3) \\ = 8 - 3y^2 + 2y^3$$

$$f(4) = (4)^3 - 3y^2 + (4)(y^3) \\ = 64 - 3y^2 + 4y^3$$

$$\int_0^4 (x^3 - 3y^2 + xy^2) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$= \frac{2}{3} [-3y^2 + 4(2y^2 - 3y^2 + 8) + 4y^2 - 3y^2 + 64]$$

$$= \frac{2}{3} (-3y^2 + 8y^3 - 12y^2 + 32 + 4y^2 - 3y^2 + 64)$$

$$= \frac{2}{3} (-3y^2 + 8y^3 - 12y^2 + 32 + 4y^3 - 3y^2 + 64)$$

$$= \frac{2}{3} (12y^3 - 18y^2 + 96)$$

$$= 8y^3 - 12y^2 + 64$$

Ahora se realiza la segunda integral

$$\int_{-2}^2 (8y^3 - 12y^2 + 64) dy \quad n=2$$

$$h = \frac{b-a}{2} = \frac{2 - (-2)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

<b>y</b>	<b>f(y)</b>
-2	-48
0	64
2	80

$$\begin{aligned}
 f(-2) &= 8(-2)^3 - 12(-2)^2 + 64 = 8(-8) - 12(4) + 64 = -64 - 48 + 64 = -48 \\
 f(0) &= 8(0)^3 - 12(0)^2 + 64 = 64 \\
 f(2) &= 8(2)^3 - 12(2)^2 + 64 = 8(8) - 12(4) + 64 = 64 - 48 + 64 = 80 \\
 \int_{-2}^2 (8y^3 - 12y^2 + 64) dy &= \frac{2}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \\
 &= \frac{2}{3} [-48 + 4(64) + 80] \\
 &= \frac{2}{3} (288) = 192 \\
 \int_{-2}^2 \int_0^4 (x^3 - 3y^2 + xy^3) dx dy &= 192
 \end{aligned}$$

Se muestra a continuación el Diagrama de Flujo del Método Simpson de 1/3 Simple :

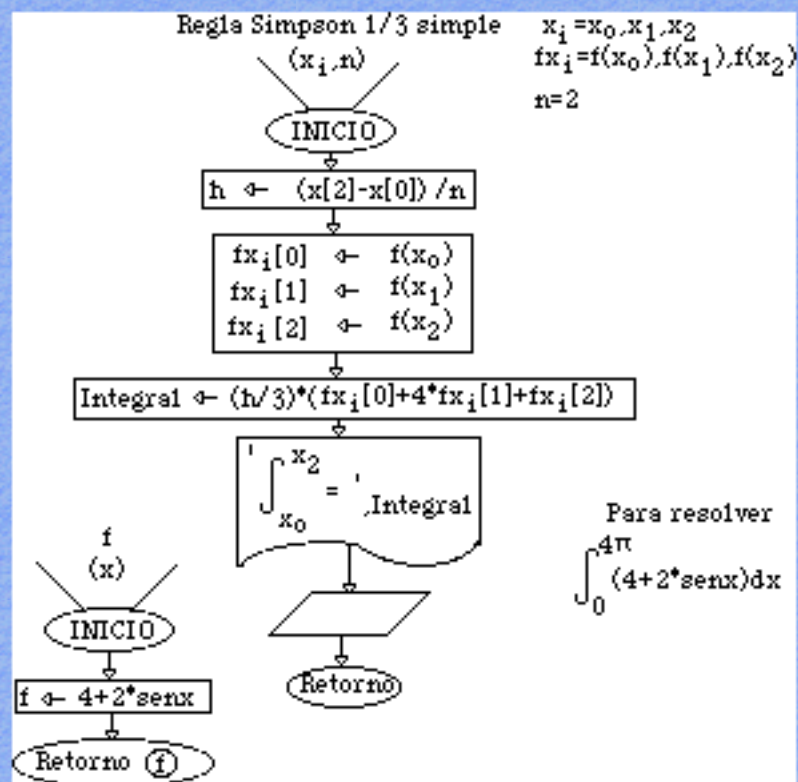


Figura 5.18.- Diagrama de flujo de la regla de Simpson

[Regreso a la página principal](#)

### 5.1.3 Regla de Simpson 3/8

De manera similar a la deducción de la regla trapezoidal y de Simpson 1/3, un polinomio de Lagrange de tercer orden se puede ajustar a cuatro puntos e integrarse, es decir la regla de Simpson 3/8 aproxima la función que se desea integrar con un polinomio de grado 3.

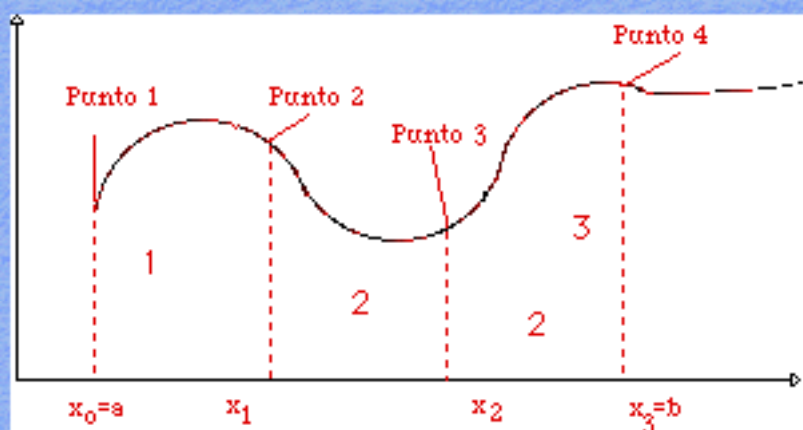
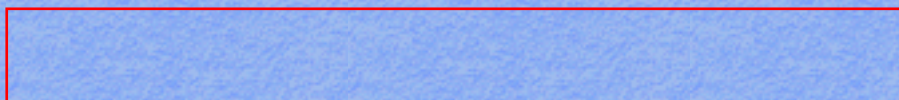


Figura 5.19.- Segmentación de la regla de Simpson de 3/8

Por lo tanto :



La integral de una función  $f(x)$  por la regla de Simpson 3/8 queda como :

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{3}{8} h [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

con

$$h = \frac{b-a}{3}$$

$$\text{Error} = -\frac{3}{80} h^5 f^4$$

donde

$$f^4 = \frac{f'''(b) - f'''(a)}{b-a}$$

La regla de Simpson 1/3 es a menudo el método de preferencia, ya que alcanza exactitud de tercer orden con tres puntos más que los cuatro puntos requeridos para la versión de Simpson 3/8. Sin embargo, la regla de 3/8 tiene utilidad cuando el número de segmentos es impar.



## Ejercicio

$$\int_0^{0.8} (0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5) dx \quad \text{con } n=3$$

Solución:

Primero necesitamos conocer el intervalo h

$$h = (0.8 - 0) / 3 = 0.26$$

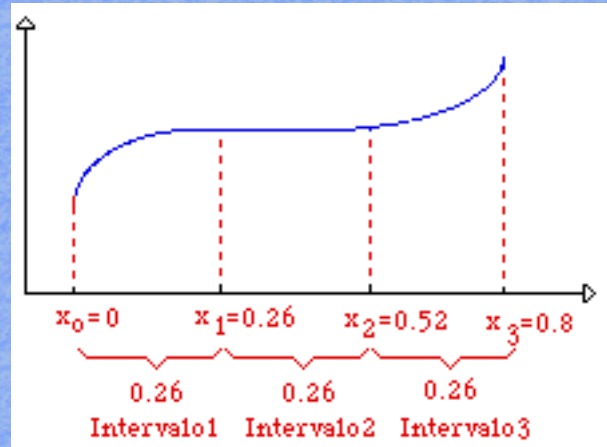


Figura 5.20.- Segmentación en tres partes de la regla de Simpson de 3/8

$x_0=0$	$f(x_0)=0.2$
$x_1=0.26$	$f(x_1)=1.429$
$x_2=0.52$	$f(x_2)=3.4826$
$x_3=0.80$	$f(x_3)=0.232$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{0.8} (0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5) dx &= \\ &= \frac{3}{8} h [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \\ &= \frac{3}{8} (0.26) [0.2 + 3(1.429) + 3(3.4826) + 0.232] \\ &= 0.0975 [0.2 + 4.287 + 10.4478 + 0.232] = 0.0975 [15.1668] = 1.4787 \end{aligned}$$

Calculemos ahora el error:

$$\text{Error} = -\frac{3}{80}h^5 \left[ \frac{f'''(b) - f'''(a)}{b-a} \right]$$

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$f'(x) = 25 - 400x + 2025x^2 - 3600x^3 + 2000x^4$$

$$f''(x) = -400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3$$

$$f'''(x) = 4050 - 21600x + 24000x^2$$

$$f'''(b) = 4050 - 21600(0.8) + 24000(0.8)^2 = 4050 - 17280 + 15360 = 2130$$

$$f'''(a) = 4050 - 21600(0) + 24000(0)^2 = 4050$$

$$\text{Error} = -\frac{3}{80}(0.26)^5 \left[ \frac{2130 - 4050}{0.8 - 0} \right] = -(0.0375)(0.001188)(-2400)$$

$$\text{Error} = 0.10692$$

### Ejercicio

Repetir el cálculo de la integral anterior, pero ahora, considerando 5 intervalos, es decir:

$$h = (b-a) / n = (0.8-0) / 5 = 0.16$$

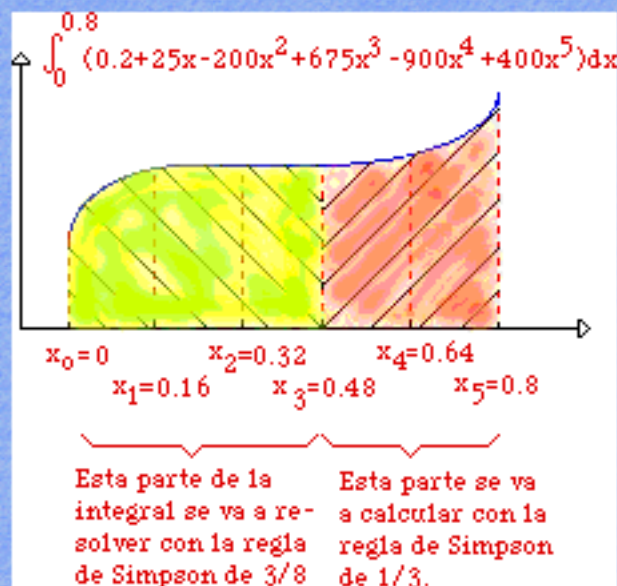


Figura 5.21.- Segmentación en cinco partes de la regla de Simpson de 3/8

$x_0=0$	$f(x_0)=0.2$
$x_1=0.16$	$f(x_1)=1.2969$
$x_2=0.32$	$f(x_2)=1.74339$
$x_3=0.48$	$f(x_3)=3.1860$
$x_4=0.64$	$f(x_4)=3.1819$
$x_5=0.80$	$f(x_5)=0.232$

Primero calculamos la integral utilizando la regla de Simpson de 3/8



$$\begin{aligned} \int_0^{0.48} (0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5) dx &= \\ &= \frac{3}{8} h [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] = \\ &= \frac{3}{8} (0.16) [0.2 + 3(1.2969) + 3(1.74339) + 3.1860] = 0.7504 \end{aligned}$$

Después, calculamos la integral utilizando la regla de Simpson de 1/3.

$$\begin{aligned} \int_{0.48}^{0.8} (0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5) dx &= \\ &= \frac{1}{3} h [f(x_3) + 4f(x_4) + f(x_5)] = \\ &= \frac{1}{3} (0.16) [3.1860 + 4(3.1819) + 0.232] = 0.86109 \end{aligned}$$

∴ Sumando las 2 integrales obtenemos el resultado total de la integral.

$$\int_0^{0.8} (0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5) dx = 0.7504 + 0.86109 = 1.61149$$

Ahora vamos a calcular el error. Para calcular el error, se saca por separado para cada integral, y después se suman. Calculemos primero el error para la regla de Simpson de 3/8.

$$\begin{aligned} \text{Error} &= -\frac{3}{80} h^5 \left[ \frac{f'''(b) - f'''(a)}{b - a} \right] \\ f'''(x) &= 4050 - 21600x + 24000x^2 \\ f'''(b) &= f'''(0.48) = 4050 - 21600(0.48) + 24000(0.48)^2 \\ f'''(b) &= 4050 - 10368 + 5529.6 = -788 \\ f'''(a) &= 4050 - 21600(0) + 24000(0)^2 = 4050 \\ \therefore \text{Error} &= -\frac{3}{80} (0.16)^5 \left[ \frac{-788.4 - 4050}{0.48 - 0} \right] = -0.0396 \end{aligned}$$

Ahora vamos a calcular el error para la regla de Simpson de 1/3

$$\begin{aligned} \text{Error} &= -\frac{1}{90} h^5 \left[ \frac{f'''(b) - f'''(a)}{b - a} \right] \\ f'''(x) &= 4050 - 21600x + 24000x^2 \\ f'''(b) &= f'''(0.8) = 4050 - 21600(0.8) + 24000(0.8)^2 = 2130 \\ f'''(a) &= f'''(0.48) = 4050 - 21600(0.48) + 24000(0.48)^2 = -788.4 \\ \text{Error} &= -\frac{1}{90} (0.16)^5 \left[ \frac{2130 - (-788.4)}{0.8 - 0.48} \right] = -0.01062 \end{aligned}$$

Por lo tanto el error total va a ser igual a la suma de los dos errores.

$$\text{Error total} = -0.0396 - 0.01062$$

$$\text{Error total} = -0.05022$$

Ejercicio:



Calcular  $\int_0^2 x^2 e^{-x^2} dx$  considerando 7 intervalos

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{7} \Rightarrow h = 0.2857$$

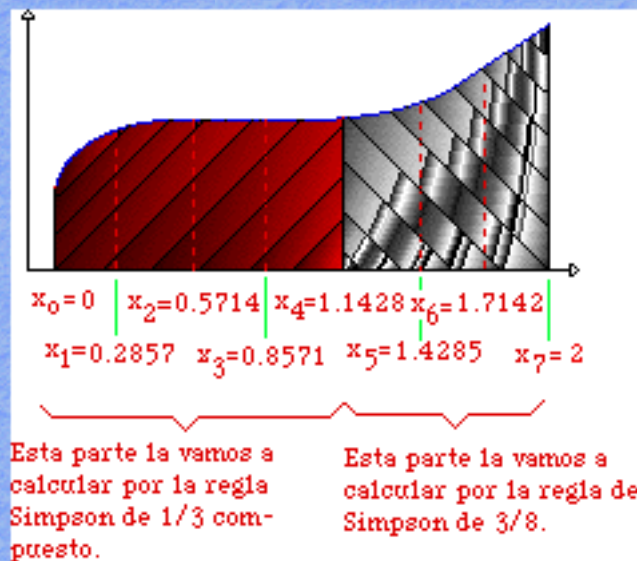


Figura 5.22.- Segmentación en 7 partes de la regla de Simpson

$x_0=0$	$f(x_0)=0$
$x_1=0.2857$	$f(x_1)=0.07522$
$x_2=0.5714$	$f(x_2)=0.2355$
$x_3=0.8571$	$f(x_3)=0.35238$
$x_4=1.1428$	$f(x_4)=0.35379$
$x_5=1.4285$	$f(x_5)=0.26175$
$x_6=1.7142$	$f(x_6)=0.15558$
$x_7=2.0$	$f(x_7)=0.07326$

Calculemos primero la integral por la regla de Simpson de 1/3

$$\int_0^{1.1428} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \Delta=2 \\ \text{impar}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{j=2 \\ \Delta=2 \\ \text{par}}}^{n-2} f(x_j) + f(x_n) \right]$$

$$\int_0^{1.1428} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{0.2857}{3} [0 + 4(0.07522 + 0.35238) + 2(0.2355) + 0.35379]$$

$$\int_0^{1.1428} x^2 e^{-x^2} dx = 0.24143$$

Ahora calculemos la integral por la regla de Simpson de 3/8

$$\int_{1.1428}^2 x^2 e^{-x^2} dx = \frac{3}{8} h[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

$$\int_{1.1428}^2 x^2 e^{-x^2} dx = \frac{3}{8} h[f(x_4) + 3f(x_5) + 3f(x_6) + f(x_7)]$$

$$\int_{1.1428}^2 x^2 e^{-x^2} dx = \frac{3}{8} (0.2857)[0.35379 + 3(0.26175) + 3(0.15558) + 0.07326]$$

$$\int_{1.1428}^2 x^2 e^{-x^2} dx = 0.17988$$

El resultado final de la integral, es la suma de los dos resultados parciales.

$$\int_0^2 x^2 e^{-x^2} dx = 0.24143 + 0.17988$$

$$\int_0^2 x^2 e^{-x^2} dx = 0.42131$$

Ejercicio:

Calcular la siguiente integral  $\int_1^{10} \ln x dx$  con  $5 \cdot 10^{-4}$  de precisión, utilizando el método de Simpson 1/3.

Solución:

Para resolver este problema, se necesita saber en cuantos intervalos dividir esta integral, para poder obtener una precisión de  $5 \cdot 10^{-4}$ .

Para encontrar el número de intervalos utilizamos la definición de error. En la regla de Simpson tenemos 2 tipos de errores, el correspondiente a la regla de Simpson de 1/3, y a la regla de Simpson de 3/8.

Utilicemos el error por la regla de Simpson de 1/3

$$\text{Error} = -\frac{h^5}{90} \left[ \frac{f'''(b) - f'''(a)}{b - a} \right]$$

Calculemos la tercera derivada.

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \frac{dx}{dx} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(x)^{-1}, f''(x) = -1 * x^{-2} \frac{dx}{dx} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}(-x^{-2}) = -(-2)x^{-3} \frac{dx}{dx} \Rightarrow f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$\therefore \text{Error} = -\frac{h^5}{90} \left[ \frac{f'''(b) - f'''(a)}{b - a} \right]$$

$$\text{Error} = 0.0005 = -\frac{(b-a)^5/n^5}{90} \left[ \frac{f'''(10) - f'''(1)}{10 - 1} \right]$$

$$(0.0005)(90) = -\frac{(10-1)^5}{n^5} \left[ \frac{\frac{2}{10^3} - \frac{2}{1^3}}{9} \right]$$



$$(0.045)n^5 = -9^5 \left[ \frac{0.002 - 2}{9} \right]$$

$$(0.045)n^5 = -9^4(-1.998)$$

$$n^5 = \frac{-9^4(-1.998)}{0.045}$$

$$n^5 = 291308.4$$

$$n = \sqrt[5]{291308.4}$$

$$n = 12.38$$

$$n \spadesuit 12$$

Nota: Puede tomarse  $n \spadesuit 13$  pero Simpson 1/3 requiere de dos intervalos y números de pares por lo que lo adecuado es o 12 ó 14. Es decir que vamos a tener 12 intervalos con,

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{12} = 0.75$$

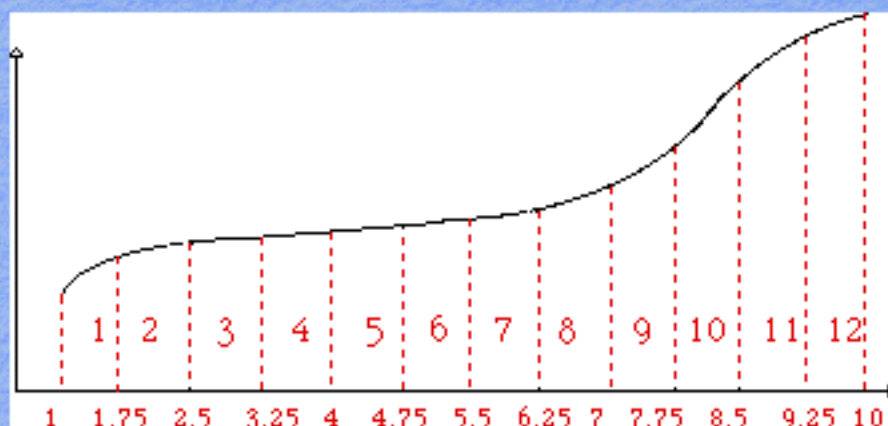


Figura 5.23.- Segmentación en 12 partes de la regla de Simpson

x	f(x)=lnx
$x_0=1$	$f(x_0)=\ln 1=0$
$x_1=1.75$	$f(x_1)=0.5596$
$x_2=2.5$	$f(x_2)=0.9163$
$x_3=3.25$	$f(x_3)=1.1786$
$x_4=4$	$f(x_4)=1.3863$
$x_5=4.75$	$f(x_5)=1.5581$
$x_6=5.5$	$f(x_6)=1.7047$
$x_7=6.25$	$f(x_7)=1.8326$
$x_8=7$	$f(x_8)=1.9459$
$x_9=7.75$	$f(x_9)=2.0477$
$x_{10}=8.5$	$f(x_{10})=2.1400$
$x_{11}=9.25$	$f(x_{11})=2.2246$
$x_{12}=10$	$f(x_{12})=2.3026$



Por lo tanto, aplicando la regla de Simpson de 1/3:

$$\int_1^{10} \ln x dx = \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \Delta=2}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{j=2 \\ \Delta=2}}^{n-2} f(x_j) + f(x_n) \right]$$

$$\int_1^{10} \ln x dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9) + f(x_{11})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8) + f(x_{10})) + f(x_{12})]$$

$$\int_1^{10} \ln x dx = \frac{0.75}{3} [0 + 4(0.5596 + 1.1786 + 1.5581 + 1.8326 + 2.0477 + 2.2246) + 2(0.9163 + 1.3863 + 1.7047 + 1.9459 + 2.1400) + 2.3026]$$

$$\int_1^{10} \ln x dx = 0.25 [0 + 4(9.4012) + 2(8.0932) + 2.3026]$$

$$\int_1^{10} \ln x dx = 0.25 (0 + 37.6048 + 16.1864 + 2.3026)$$

$$\int_1^{10} \ln x dx = 0.25 (56.0938)$$

$$\int_1^{10} \ln x dx = 14.02345$$

El valor correcto o Exacto de la integral, por fórmula de integración es:

$$\int_1^{10} \ln x dx = x \ln x - x \Big|_1^{10} = 10 \ln x - 10 - (1 \ln 1 - 1) = 10(2.30258) - 10 - (0 - 1)$$

$$\int_1^{10} \ln x dx = 23.0258 - 10 + 1$$

$$\int_1^{10} \ln x dx = 14.02585$$

Ejercicio:

Encontrar el valor de la **doble integral** con  $n=3$

$$\int_{-2}^2 \int_0^4 (x^3 - 3y^2 + xy^3) dx dy$$

utilizando el método de Simpson 3/8 Simple

Solución:

Sabemos que la regla de Simpson de 3/8 Simple es

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{3}{8} h [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \quad \text{con} \quad h = \frac{b-a}{3}$$

Como es una doble integral, primero resolvemos la integral con respecto a  $x$  y luego con respecto a  $y$ .

$$\int_0^4 (x^3 - 3y^2 + xy^3) dx \quad \text{donde } y \text{ es constante.}$$

Primero calculemos  $h$

$$h = \frac{b-a}{3} = \frac{4-0}{3} = \frac{4}{3} = 1.3333$$

$$f(x) = x^3 - 3y^2 + xy^3$$

$$x_0 = 0$$

$$f(x_0) = 0^3 - 3y^2 + 0y^3; f(x_0) = -3y^2$$

$$x_1 = 1.3333$$

$$f(x_1) = (1.3333)^3 - 3y^2 + 1.3333y^3; f(x_1) = 2.37 - 3y^2 + 1.333y^3$$

$$x_2 = 2.6666$$

$$f(x_2) = (2.6666)^3 - 3y^2 + 2.6666y^3; f(x_2) = 18.96 - 3y^2 + 2.66y^3$$

$$x_3 = 4$$

$$f(x_3) = 4x^3 - 3y^2 + 4y^3; f(x_3) = 64 - 3y^2 + 4y^3$$

$$\int_0^4 (x^3 - 3y^2 + xy^3) dx = \frac{3}{8} (1.333) [-3y^2 + 3[2.37 - 3y^2 + 1.33y^3] +$$

$$3[18.96 - 3y^2 + 2.66y^3] + 64 - 3y^2 + 4y^3]$$

$$\int_0^4 (x^3 - 3y^2 + xy^3) dx = 0.5 [-3y^2 + 7.11 - 9y^2 + 3.99y^3 + 56.88 - 9y^2 + 7.98y^3$$

$$+ 64 - 3y^2 + 4y^3]$$

$$\int_0^4 (x^3 - 3y^2 + xy^3) dx = 0.5 [-24y^2 + 127.99 + 15.97y^3]$$

$$\therefore \int_0^4 (x^3 - 3y^2 + xy^3) dx = 63.995 - 12y^2 + 7.985y^3$$

Ahora vamos a calcular la integral con respecto a y.

$$\int_{-2}^2 (63.995 - 12y^2 + 7.985y^3) dy$$

Calculemos ahora h con n=3

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(-2)}{3} = \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3} = 1.3333$$

$$f(y) = 63.995 - 12y^2 + 7.985y^3$$

$$y_0 = -2$$

$$f(y_0) = 63.995 - 12(-2)^2 + 7.985(-2)^3$$

$$f(y_0) = 63.995 - 48 - 63.88$$

$$f(y_0) = -47.885$$

$$y_1 = -0.6667$$

$$f(y_1) = 63.995 - 12(-0.6667)^2 + 7.985(-0.6667)^3$$

$$f(y_1) = 63.995 - 5.3338 - 2.3662$$

$$f(y_1) = 56.295$$

$$y_2 = 0.6666$$

$$f(y_2) = 63.995 - 12(0.6666)^2 + 7.985(0.6666)^3$$

$$f(y_2) = 63.995 - 5.3322 + 2.3652$$

$$f(y_2) = 61.028$$

$$y_3 = 2$$

$$f(y_3) = 63.995 - 12(2)^2 + 7.985(2)^3$$

$$f(y_3) = 63.995 - 48 + 63.88$$

$$f(y_3) = 79.875$$

$$f(y_3) = 79.875$$

$$\int_{-2}^2 (63.995 - 12y^2 + 7.985y^3) dy =$$

$$= \frac{3}{8} h [f(y_0) + 3f(y_1) + 3f(y_2) + f(y_3)] =$$

$$= \frac{3}{8} (1.333) [-47.885 + 3(56.295) + 3(61.028) + 79.875]$$

$$= 0.5 [-47.885 + 168.885 + 183.084 + 79.875] = 0.5(383.959)$$

$$= 191.9795$$

$$\therefore \int_{-2}^2 \int_0^4 (x^3 - 3y^2 + xy^3) dx dy = 191.9795$$

Esto es con la regla de Simpson de 3/8 Simple

Resolvamos ahora esta doble integral analíticamente. Primero resolvamos la integral con respecto a x.



$$\int_{-2}^2 \left( \frac{x^4}{4} - 3y^2x + y^3 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^4 dy = \int_{-2}^2 \left[ \frac{4^4 - 0^4}{4} - 3y^2(4 - 0) + \frac{y^3}{2}(4^2 - 0^2) \right] dy =$$

$$= \int_{-2}^2 \left[ \frac{4^4}{4} - 3y^2(4) + \frac{y^3}{2}(16) \right] dy = \int_{-2}^2 (4^3 - 12y^2 + 8y^3) dy =$$

$$= \int_{-2}^2 (64 - 12y^2 + 8y^3) dy$$

Ahora resolvamos la integral con respecto a y.

$$\int_{-2}^2 (64 - 12y^2 + 8y^3) dy = \left[ 64y - \frac{12}{3}y^3 + \frac{8}{4}y^4 \right]_{-2}^2 =$$

$$= 64(2 - (-2)) - 4(2^3 - (-2)^3) + 2(2^4 - (-2)^4) =$$

$$= 64(4) - 4(8 + 8) + 2(16 - 16) = 256 - 64 + 0 = 192$$

$$\int_{-2}^2 \int_0^4 (x^3 - 3y^2 + xy^3) dx dy = 192 \Leftarrow \text{Solución\_Analítica}$$

Resumen de los resultados

$$\int_{-2}^2 \int_0^4 (x^3 - 3y^2 + xy^3) dx dy =$$

	Integral	%Error con respecto a la inte- gral analítica
<b>Solución Analítica</b>	192	0%
Regla del trapecio	224	16.66%
Regla de Simpson 3/8	191.9795	0.01%

$$\% \text{Error con respecto a la integral} = \left| \frac{\text{Solución\_Analítica} - \text{Método\_Númerico}}{\text{Solución\_Analítica}} \right| * 100$$

Tarea:

Calcular la siguiente integral  $\int_1^{10} \ln x dx$  con  $5 \cdot 10^{-4}$  de precisión, utilizando el método de Simpson 3/8.

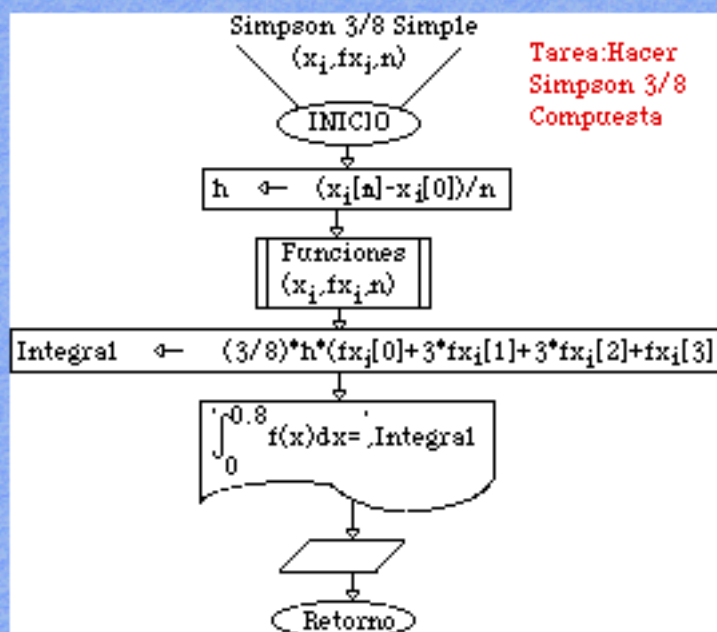


Figura 5.24.- Simpson 3/8 Simple

Para  $\int_0^{0.8} (0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5) dx$

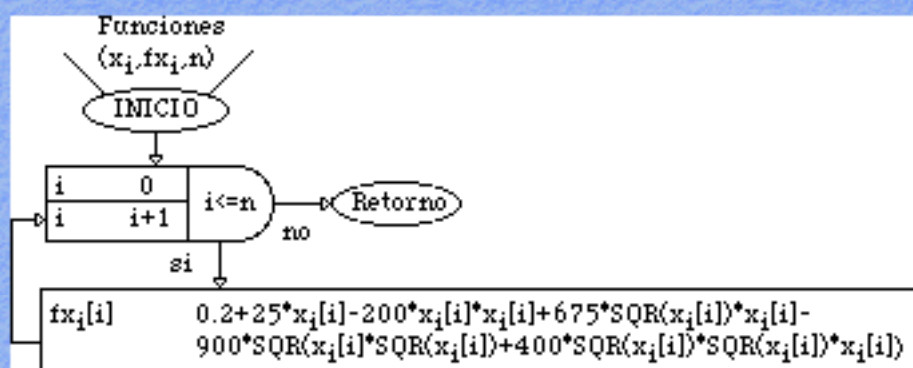


Figura 5.25.- Funciones

[Regreso a la página principal](#)

---

## 5.2 Integrales Definida Problemáticas

---

A menudo es necesario evaluar la integral definida de una función que no tiene una antiderivada explícita o cuya antiderivada no es fácil de obtener. El método básico con que se aproxima la  $\int_a^b f(x)dx$  recibe el nombre de cuadratura numérica y emplea una suma del tipo:

$$\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

de manera tal que:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

Ejemplo de estos métodos básicos son la regla del trapecio y la regla de Simpson.

Como el término de error de la regla del trapecio contiene la segunda derivada de la  $f(x)$ , es decir  $f''(x)$ , la regla del trapecio da el resultado exacto cuando se aplica a una función cuya segunda derivada sea cero, es decir, cualquier polinomio de grado 1 ó menos. Desde luego que aquí tendríamos un problema un problema si la regla del trapecio se aplicará a un polinomio de grado 2 ó mayor, ya que no tendríamos el resultado exacto.

En el caso de la regla de Simpson, dado que el término de error contiene la cuarta derivada de  $f(x)$ , proporciona resultados exactos al aplicarla a un polinomio cualquiera de grado tres ó de grado menor. Nuevamente aquí tendríamos un problema si la regla de Simpson se aplicará a un polinomio de grado 4 ó mayor, ya que no tendríamos el resultado exacto.

[Regreso a la página principal](#)

---



## 5.3 Otra fórmula de Newton-Cotes

La regla del trapecio y de Simpson son ejemplos de una clase de métodos denominados fórmulas de Newton-Cotes. Existen dos categorías de fórmulas de Newton-Cotes: Abiertas y cerradas.

La fórmula cerrada de  $(n+1)$  puntos de Newton-Cotes utiliza los nodos  $x_i = x_0 + ih$  para  $i=0,1,2,\dots,n$ , donde  $x_0=a$  y  $x_n=b$  y  $h = (b-a)/n$ .

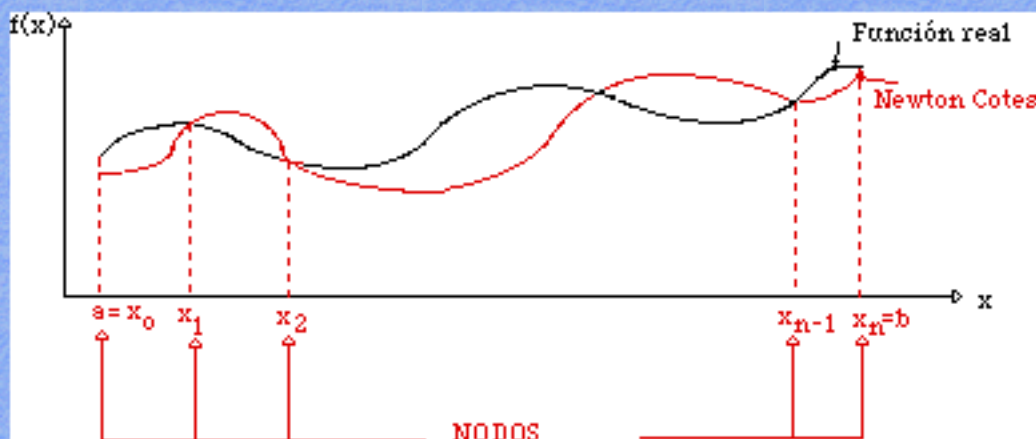


Figura 5.24.- Figura de Newton-Cotes

A esta fórmula se le llama cerrada, porque los extremos del intervalo cerrado  $[a,b]$  se incluyen como nodos.

La fórmula cerrada de  $(n+1)$  puntos de Newton-Cotes adopta la forma:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

Algunas de las fórmulas cerradas comunes de Newton-Cotes son:

- 1.- La regla del trapecio
- 2.- La regla de Simpson de 1/3
- 3.- La regla de Simpson de 3/8

En las fórmulas abiertas de Newton-Cotes, los nodos  $x_i = x_0 + ih$  se usan para cada  $i=0,1,2,\dots,n$  donde  $h = (b-a)/(n+2)$  y  $x_0 = a+h$  y  $x_n = b-h$ . Los extremos se marcan haciendo:

$$a = x_{-1} \text{ y } b = x_{n+1}$$

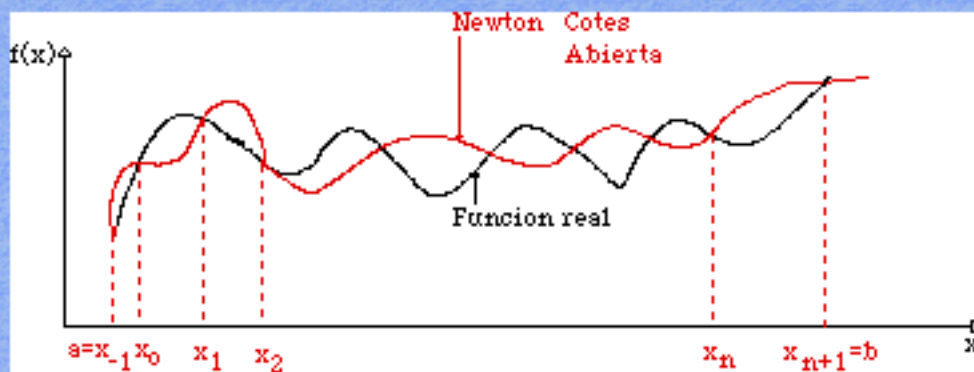


Figura 5.25.- Newton-Cotes abierta

Las fórmulas abiertas de Newton-Cotes contiene todos los nodos usados para hacer las aproximaciones dentro del intervalo abierto (a,b). Las fórmulas se convierten en:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

Algunas de las fórmulas abiertas de Newton-Cotes comunes son:

La regla del punto medio. (Pag 196)

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)dx = 2hf(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(\xi) \quad \text{donde } x_{-1} < \xi < x_1$$

Regla del punto medio n=0

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)dx = \frac{3h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi) \quad \text{donde } x_{-1} < \xi < x_2$$

Regla del punto medio n=1

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x)dx = \frac{4h}{3} [2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi) \quad \text{donde } x_{-1} < \xi < x_3$$

Regla del punto medio n=2

$$\int_{x_{-1}}^{x_4} f(x)dx = \frac{5h}{24} [11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)] + \frac{95h^5}{144} f^{(4)}(\xi)$$

donde  $x_{-1} < \xi < x_4$

Regla del punto medio n=3

En términos generales, las fórmulas de Newton-Cotes no son adecuadas para utilizarse en intervalos de integración grande. Para estos casos se requieren fórmulas de grado superior, y los valores de sus coeficientes son difíciles de obtener. Además, las fórmulas de Newton-Cotes se basaron en los polinomios interpolantes que emplean nodos con espacios iguales, procedimiento que resulta inexacto en intervalos grandes a causa de la naturaleza oscilatoria de los polinomios de grado superior.

Para poder resolver este problema se utiliza la integración numérica compuesta, en la cual se aplican las fórmulas de Newton-Cotes de bajo orden. Estos son los métodos de mayor uso. Ejemplos



de estos métodos son: La regla compuesta de Simpson y la regla compuesta del Trapecio.

En la integración de Romberg se usa la regla compuesta del Trapecio para obtener aproximaciones preliminares y luego el proceso de extrapolación de Richardson para mejorar las aproximaciones.

Las fórmulas de Newton-Cotes se derivaron integrando los polinomios interpolantes. En todas las fórmulas de Newton-Cotes se emplean valores de la función en puntos equidistantes (igual distancia entre un punto y otro). Esta práctica es adecuada cuando las fórmulas se combinan para formar las reglas compuestas sin embargo, esta restricción puede afectar considerablemente la exactitud de la aproximación.

La cuadratura Gaussiana selecciona los puntos de la evaluación de manera óptima y no en una forma igualmente espaciada. Se escogen los nodos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en el intervalo  $[a, b]$  y los coeficientes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  para reducir en lo posible el error esperado que se obtiene al efectuar la aproximación:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$$

En esta fórmula de aproximación de la integral, los coeficientes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son arbitrarios y los nodos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  están restringidos solo por la especificación de que se encuentren en  $[a, b]$ , el intervalo de la integración.

Un ejemplo de método de cuadratura, es el método de Gauss-Legendre.

[Regreso a la página principal](#)



### 5.3.1 Integración de Romberg

La integración de Romberg se basa en el uso de la regla del Trapecio compuesto. La regla del trapecio compuesto sabemos que es:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] - \frac{(b-a)}{12} h^2 f''$$

donde  $h=(b-a)/n$

Si nosotros cambiamos la nomenclatura de la regla del Trapecio Compuesto se puede escribir como:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

$$I(h) = \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$E(h) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(x)$$

Por lo tanto la regla del trapecio compuesto se puede escribir como:

$$I = I(h) + E(h)$$

Ahora bien, el intervalo  $h$  se puede hacer de diferentes tamaños para los mismos límites superior e inferior  $(b,a)$  de la integral.

Gráficamente esto sería:

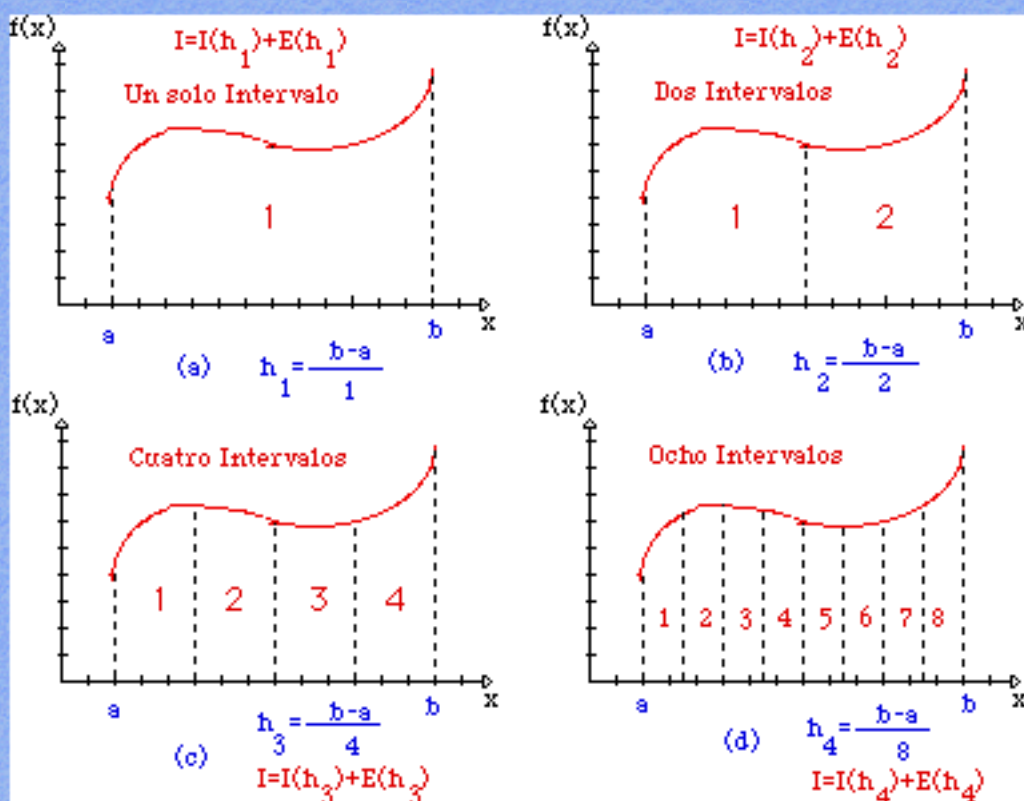


Figura 5.26.- Partición de intervalos: (a)Un solo intervalo; (b)Dos intervalos; (c)Cuatro Intervalos; (d) Ocho intervalos.

Para cada uno de los casos anteriores, la regla del trapecio compuesto se expresaría como:

$$I=I(h_1)+E(h_1)$$

$$I=I(h_2)+E(h_2)$$

$$I=I(h_3)+E(h_3)$$

$$I=I(h_4)+E(h_4)$$

Lo que nosotros deseáramos es que el valor de la integral  $I$  fuese del mismo para todos los casos de  $h$ . Pongamos como ejemplo las dos primeras integrales.

$$I=I(h_1)+E(h_1)= I(h_2)+E(h_2) \quad (1)$$

Por otro lado, sabiendo que:

$$E = \frac{-(b-a)}{12} h^2 f''(x)$$

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} = \frac{\frac{-(b-a)}{12} h_1^2 f''(x)}{\frac{-(b-a)}{12} h_2^2 f''(x)} = \frac{h_1^2}{h_2^2} \Rightarrow \frac{E(h_1)}{E(h_2)} = \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

$$\therefore E(h_1) = \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^2 E(h_2)$$

Sustituyendo el último valor de:

$E(h_1)$  en (1)

$$I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2)$$

$$I(h_1) + \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^2 E(h_2) = I(h_2) + E(h_2)$$

$$\left( \frac{h_1}{h_2} \right)^2 E(h_2) - E(h_2) = I(h_2) - I(h_1)$$

$$E(h_2) \left[ \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^2 - 1 \right] = I(h_2) - I(h_1)$$

$$E(h_2) = \frac{I(h_2) - I(h_1)}{\left[ \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^2 - 1 \right]}$$

Sin embargo, como  $I=I(h_2)+E(h_2)$ , sustituimos  $E(h_2)$  en esta ecuación

$$I = I(h_2) + \frac{I(h_2) - I(h_1)}{\left[ \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^2 - 1 \right]}$$

Con la ecuación anterior se calcula una nueva aproximación de la integral.

Vamos a hacer un ejemplo para aplicar la ecuación anterior.

Ejemplo:



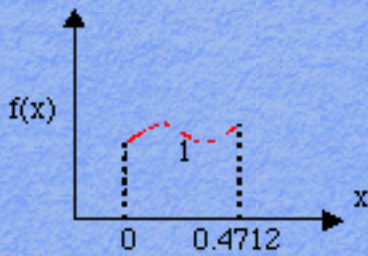
Calcular por el método de Romberg con un error relativo de exactitud de 0.05%, la siguiente integral

$$\int_0^{3\pi/20} \text{sen}(5x + 1) dx$$

utilice para la regla del Trapecio compuesto  $n=1,2,4,8$ , es decir, un subintervalo, 2 subintervalos, 4 subintervalos y 8 subintervalos.

Solución:

Empezemos con  $n=1$



$$h_1 = \frac{b-a}{n} = \frac{3\pi/20 - 0}{1} = \frac{0.4712 - 0}{1} = 0.4712$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 0.4712$$

$$f(x_0) = \text{sen}(5 * 0 + 1) = \text{sen}(1) = 0.8414$$

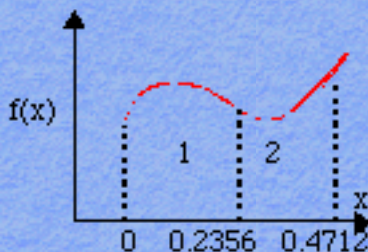
$$f(x_1) = \text{sen}(5 * 0.4712 + 1) = \text{sen}(3.356) = -0.2127$$

$$I = \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$I = \frac{0.4712}{2} [0.8414 + (-0.2127)]$$

$$I = 0.1481$$

con  $n=2$



$$h_2 = (0.4712 - 0) / 2 = 0.2356$$

$$x_0 = 0; x_1 = 0.2356 \text{ y } x_2 = 0.4712$$

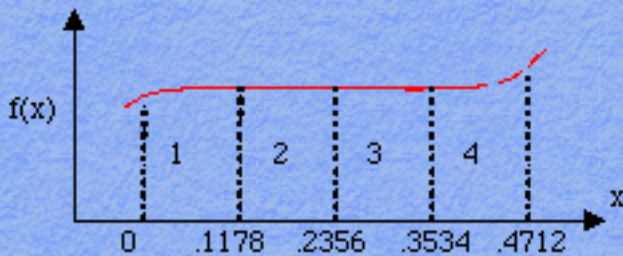


$$f(x_0)=0.8414; f(x_1)=0.8212 \text{ y } f(x_2)=-0.2127$$

$$I = \frac{0.2356}{2} [0.8414 + 2(0.8212) - 0.2127] = 0.2675$$

con  $n=4$

$$h_3 = \frac{0.4712 - 0}{4} = 0.1178$$



$$x_0=0; x_1=0.1178 \text{ y } x_2=0.2356$$

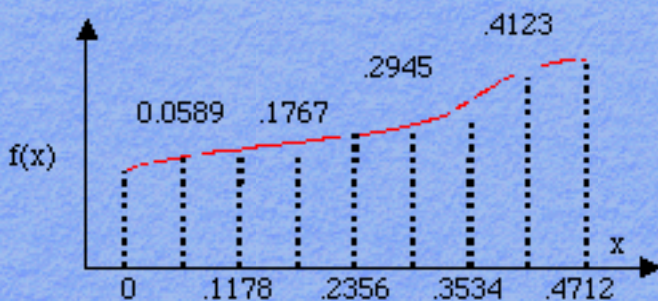
$$f(x_0)=0.8414; f(x_1)=0.9998 \text{ y } f(x_2)=0.8212$$

$$x_3=0.3534; x_4=0.4712$$

$$f(x_3)=0.3659; f(x_4)=-0.2127$$

$$I = \frac{0.1178}{2} [0.8414 + 2(0.9998 + 0.8212 + 0.3659) - 0.2127] = 0.2947$$

con  $n=8$



$$x_0=0 \text{ } f(x_0)=0.8414$$

$$x_1=0.0589 \text{ } f(x_1)=0.9620$$

$$x_2=0.1178 \text{ } f(x_2)=0.9998$$

$$x_3=0.1767 \text{ } f(x_3)=0.9515$$

$$x_4=0.2356 \text{ } f(x_4)=0.8212$$

$$x_5=0.2945 \text{ } f(x_5)=0.6202$$

$$x_6=0.3534 \text{ } f(x_6)=0.3659$$




$$x_7=0.4123 \text{ } f(x_7)=0.08$$

$$x_8=0.4712 \text{ } f(x_8)=-0.2127$$

$$I = \frac{0.0589}{2} [0.8414 + 2(0.9620 + 0.9998 + 0.9515 + 0.8212 + 0.6202 + 0.3659 + 0.08) - 0.2127]$$

$$I = 0.3012$$

Una vez obtenidos estas primeras integrales, se procede a hacer un proceso parecido a la interpolación de Newton Lagrange. El proceso en el caso de la integración de Romberg se conoce como extrapolación de Richardson. Continuando con el ejemplo, vamos aplicar la extrapolación de Richardson.

n Número de subintervalos	h	Integración con la regla del Trapezio compuesta	
1	0.4712	0.1481	
2	0.2356	0.2675	
4	0.1178	0.2947	
8	0.0589	0.3012	

Para calcular la siguiente columna de esta tabla, aplicamos la ecuación obtenida de la integración de Romberg.

$$I = I(h_2) + \frac{I(h_2) - I(h_1)}{\left[\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 - 1\right]}$$






Empezamos:

$$I = 0.2675 + \frac{0.2675 - 0.1481}{\left[\left(\frac{0.4712}{0.2356}\right)^2 - 1\right]} = 0.3073$$

$$I = 0.2947 + \frac{0.2947 - 0.2675}{\left[\left(\frac{0.2356}{0.1178}\right)^2 - 1\right]} = 0.3038$$

$$I = 0.3012 + \frac{0.3012 - 0.2947}{\left[\left(\frac{0.1178}{0.0589}\right)^2 - 1\right]} = 0.3033$$

Ahora ya podemos escribir la siguiente columna de la tabla:

n Número de Subintervalos	h	Integración con la re- gla del Trapecio Com- puesto		Aplicación de la Ecuación de la integración de Romberg.	
1	0.4712	0.1481		0.3073	
2	0.2356	0.2675		0.3038	
4	0.1178	0.2947		0.3033	
8	0.0589	0.3012			

Calculamos el error relativo



$$\left| \frac{V_{\text{actual}} - V_{\text{anterior}}}{V_{\text{actual}}} \right| * 100$$

$$\left| \frac{0.30338 - 0.3073}{0.3038} \right| * 100 = 1.15\%$$

$$\left| \frac{0.3033 - 0.3038}{0.3033} \right| * 100 = 0.16\%$$

Calculamos la siguiente columna aplicando nuevamente la ecuación para la integración de Romberg.

$$I = I(h_2) + \frac{I(h_2) - I(h_1)}{\left[ \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^2 - 1 \right]}$$

$$I = 0.3038 + \frac{0.3038 - 0.3073}{\left[ \left( \frac{0.4712}{0.1178} \right)^2 - 1 \right]} = 0.3035$$

$$I = 0.3033 + \frac{0.3033 - 0.3038}{\left[ \left( \frac{0.2356}{0.0589} \right)^2 - 1 \right]} = 0.30326$$

Ahora ya podemos escribir la siguiente columna de la tabla:

n Número de subintervalos	h	Integración con la regla del Trapecio Compuesto	Aplicación de la ecuación de la Integración de Romberg	Aplicación de la ecuación de la Integración de Romberg
1	0.4712	0.1481 ➤	0.3073 ➤	0.3035 ➤
2	0.2356	0.2675 ➤	0.3038 ➤	0.30326 ➤
4	0.1178	0.2947 ➤	0.3033	
8	0.0589	0.3012		

Calculamos el % error relativo

$$\left[ \frac{V_{\text{actual}} - V_{\text{anterior}}}{V_{\text{actual}}} \right] * 100$$

$$\left[ \frac{0.30326 - 0.3035}{0.30326} \right] * 100 = 0.079\%$$

Como todavía no alcanzamos el % de error relativo, calculamos la siguiente columna aplicando nuevamente la ecuación para la integración de Romberg



$$I = I(h_2) + \frac{I(h_2) - I(h_1)}{\left[\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 - 1\right]}$$

$$I = 0.30326 + \frac{0.30326 - 0.3035}{\left[\left(\frac{0.4712}{0.0589}\right)^2 - 1\right]} = 0.30325$$

Ahora ya podemos escribir la siguiente columna de la tabla:

n Número de subintervalos	h	Integración con la regla del Trapecio Compuesto	Aplicación de la ecuación de la Integración de Romberg	Aplicación de la ecuación de la Integración de Romberg
1	0.1481	➤ 0.3073 ➤	0.3025 ➤	0.30325
2	0.2675	➤ 0.3038 ➤	0.30326	
4	0.2947	➤ 0.3033		
8	0.3012			

Calculamos el % de error relativo:

$$\left[ \frac{V_{\text{actual}} - V_{\text{anterior}}}{V_{\text{actual}}} \right] * 100 =$$

$$\left| \frac{0.30325 - 0.30326}{0.30325} \right| * 100 = 0.003\%$$

Ya se logró el % de error relativo solicitado, de hecho el % alcanzado es menor que el pedido.

En el caso de que el error hubiese sido mayor al solicitado, entonces se tendría que haber ampliado el número de subintervalos. La manera de ir incrementando el número de subintervalos es:

1, 2, 4, 8, 16, 32, ....

$2^i$   $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Todo el proceso anterior, se puede elevar a cabo usando una ecuación, conocida como la ecuación para la integración por medio de Romberg. La ecuación es:

$$I_{jk} = \frac{(4^{k-1})I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

donde j es la Integral y k es el Nivel de Integración.

Probemos usar esta ecuación con el ejemplo anterior. Desde luego, para aplicar esta ecuación necesitamos primero calcular las integrales por el método del Trapecio Compuesto. Estas integrales corresponden a la primera columna del ejemplo anterior.

	<b>h</b>	<b>K=1</b>
1	0.4712	0.1481
2	0.2356	0.2675
4	0.1178	0.2947
8	0.0589	0.3012

$$I_{1,2} = \frac{(4^{2-1})I_{2,1} - I_{1,1}}{4^{2-1} - 1} = \frac{(4)(0.2675) - 0.1481}{4 - 1} = 0.3073$$

$$I_{2,2} = \frac{(4^{2-1})I_{3,1} - I_{2,1}}{4^{2-1} - 1} = \frac{(4)(0.2947) - 0.2675}{4 - 1} = 0.3038$$

$$I_{3,2} = \frac{(4^{2-1})I_{4,1} - I_{3,1}}{4^{2-1} - 1} = \frac{(4)(0.3012) - 0.2947}{4 - 1} = 0.3033$$

Por lo tanto ahora la tabla, quedaría como:

	<b>h</b>	<b>K=1</b>	<b>K=2</b>
1	0.4712	0.1481	0.3073
2	0.2356	0.2675	0.3038
4	0.1178	0.2947	0.3033
8	0.0589	0.3012	

Nuevamente apliquemos la ecuación para la integración por medio de Romberg.

$$I_{1,3} = \frac{(4^{3-1})I_{2,2} - I_{1,2}}{4^{3-1} - 1} = \frac{4^{3-1}(0.3038) - 0.3073}{4^{3-1} - 1} = 0.3035$$

$$I_{2,3} = \frac{(4^{3-1})I_{3,2} - I_{2,2}}{4^{3-1} - 1} = \frac{16(0.3033) - 0.3038}{15} = 0.30326$$

Por lo tanto, la tabla queda finalmente como:

K=1 K = 2 K = 3

<b>1</b>	<b>0.1481</b>	<b>0.3073</b>	<b>0.3035</b>	
2	0.2675	0.3038	0.30326	
4	0.2947	0.3033		
8	0.3012			

Nuevamente apliquemos la ecuación para la integración por medio de Romberg



$$I_{1,4} = \frac{(4^{4-1})I_{2,3} - I_{1,3}}{4^{4-1} - 1} = \frac{64(0.30326) - 0.3035}{63} = 0.30325$$

Por lo tanto, la tabla queda finalmente como:

K=1 K = 2 K = 3 K = 4

1	0.4712	0.1481	0.3073	0.3035	0.30325
2	0.2356	0.2675	0.3038	0.30326	
3	0.1178	0.2947	0.3033		
4	0.0589	0.3012			

Ejemplo del método de Romberg

Encuentre una aproximación a la integral  $\int_0^1 \sin \pi x dx$  por el método de Romberg.

Utiliza para la regla del trapecio compuesto  $n=1,2,4,8$ , y 16 donde  $n$  son los subintervalos o trapezoides.

Sabemos que:

$$I_{jk} = \frac{(4^{k-1})I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

$i$ =integral

$k$ =Nivel de Integración

Para poder aplicar la ecuación anterior, necesitamos primero calcular las integrales por el método del trapecio compuesto.

Empezemos con  $n=1$

$$I = \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$h_1 = \frac{b-a}{n}$$

$$h_1 = \frac{1-0}{1} = 1$$

$$\therefore x_0 = 0; x_1 = 1$$

$$f(x) = \sin \pi x$$

$$f(x_0) = \sin \pi(0) = \sin(0) = 0$$

$$f(x_0) = 0$$

$$f(x_1) = \sin \pi(1) = \sin \pi = -2.0676 \cdot 10^{-13}$$

$$f(x_1) = -2.0676 \cdot 10^{-13}$$

$$\therefore I = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] \Rightarrow I = \frac{1}{2} [0 + (-2.0676 \cdot 10^{-13})]$$

$$I \approx 0$$

$n=2$



$$h_2 = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{2} = 0.5$$

$$\therefore x_0 = 0; x_1 = 0.5; x_2 = 1.0$$

$$f(x) = \sin \pi x$$

$$f(x_0) = \sin \pi(0) = \sin(0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$$

$$f(x_1) = \sin \pi(0.5) = \sin(1.5707) \Rightarrow f(x_1) = 1$$

$$f(x_2) = \sin \pi(1) = \sin \pi = 0 \Rightarrow f(x_2) = 0$$

$$\therefore I = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)]$$

$$I = \frac{0.5}{2} [0 + 2(1) + 0] = \frac{0.5}{2} (2)$$

$$I = 0.5$$

$$n=4$$

$$h_3 = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

$$\therefore x_0 = 0; x_1 = 0.25; x_2 = 0.50; x_3 = 0.75; x_4 = 1.0$$

$$f(x) = \sin \pi x$$

$$f(x_0) = 0$$

$$f(x_1) = \sin \pi(0.25) = 0.7071 \Rightarrow f(x_1) = 0.7071$$

$$f(x_2) = 1.0$$

$$f(x_3) = \sin \pi(0.75) = 0.7071 \Rightarrow f(x_3) = 0.7071$$

$$f(x_4) = 0$$

$$\therefore I = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)] + f(x_4)]$$

$$I = \frac{0.25}{2} [0 + 2(0.7071 + 1 + 0.7071) + 0] = \frac{0.25}{2} [2(0.7071 + 0.7071 + 1)]$$

$$I = 0.25(0.7071 + 0.7071 + 1) = 0.60355$$

$$n=8$$

$$h_4 = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{8} = 0.125$$

$$\therefore x_0 = 0; x_1 = 0.125; x_2 = 0.25; x_3 = 0.375; x_4 = 0.500;$$

$$x_5 = 0.625; x_6 = 0.75; x_7 = 0.875; x_8 = 1.0$$

$$f(x) = \sin \pi x$$

$$f(x_0) = 0$$

$$f(x_1) = \sin \pi(0.125) = 0.3826$$

$$f(x_2) = 0.7071$$

$$f(x_3) = \sin \pi(0.375) = 0.9238$$

$$f(x_4) = 1.0$$

$$f(x_5) = \sin \pi(0.625) = 0.9238$$

$$f(x_6) = 0.7071$$

$$f(x_7) = \sin \pi(0.875) = 0.3826$$

$$f(x_8) = 0$$

$$\therefore I = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)] + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6) + f(x_7)] + f(x_8)]$$

$$I = \frac{0.25}{2} [0 + 2(0.3826 + 0.7071 + 0.9238 + 1 + 0.9238 + 0.7071 + 0.3826) + 0]$$

$$I = 0.628375$$

$$n=16$$

$$h_5 = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{16} = 0.0625$$

$$\therefore x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$$

$$x_1 = 0.0625 \Rightarrow f(x_1) = 0.1950$$

$$x_2 = 0.125 \Rightarrow f(x_2) = 0.3826$$

$$x_3 = 0.1875 \Rightarrow f(x_3) = 0.5555$$

$$x_4 = 0.25 \Rightarrow f(x_4) = 0.7071$$

$$x_5 = 0.3125 \Rightarrow f(x_5) = 0.8314$$

$$x_6 = 0.375 \Rightarrow f(x_6) = 0.9238$$

$$x_7 = 0.4375 \Rightarrow f(x_7) = 0.9807$$

$$x_8 = 0.5 \Rightarrow f(x_8) = 1.0$$

$$x_9 = 0.5625 \Rightarrow f(x_9) = 0.9807$$

$$x_{10} = 0.625 \Rightarrow f(x_{10}) = 0.9238$$

$$x_{11} = 0.6875 \Rightarrow f(x_{11}) = 0.8314$$

$$x_{12} = 0.75 \Rightarrow f(x_{12}) = 0.7071$$

$$x_{13} = 0.8125 \Rightarrow f(x_{13}) = 0.555$$

$$x_{14} = 0.875 \Rightarrow f(x_{14}) = 0.3826$$

$$x_{15} = 0.9375 \Rightarrow f(x_{15}) = 0.1950$$

$$x_{16} = 1.000 \Rightarrow f(x_{16}) = 0$$

$$\therefore I = \frac{h}{2} [2f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6) + f(x_7)$$

$$+ f(x_8) + f(x_9) + f(x_{10}) + f(x_{11}) + f(x_{12}) + f(x_{13}) + f(x_{14}) + f(x_{15})]$$

$$I = \frac{0.0625}{2} [0 + 2(0.1950 + 0.3826 + 0.555 + 0.7071 + 0.8314 + 0.9238$$

$$0.9807 + 1 + 0.9807 + 0.9238 + 0.8314 + 0.7071 + 0.555 + 0.3826 + 0.1950) + 0]$$

$$I = 0.6345125$$

Vayamos formando la tabla:

	n	h	K=1	K=2
$2^0$	1	1	0	
$2^1$	2	0.5	0.5	
$2^2$	4	0.25	0.60355	
$2^3$	8	0.125	0.628375	
$2^4$	16	0.0625	0.6345125	

$$I_{jk} = \frac{(4^{k-1})I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

$$I_{1,2} = \frac{(4^{2-1})I_{2,1} - I_{1,1}}{4^{2-1} - 1} = \frac{(4)(0.5) - 0}{4 - 1} = \frac{2 - 0}{3} = 0.666$$

$$I_{2,2} = \frac{(4^{2-1})I_{3,1} - I_{2,1}}{4^{2-1} - 1} = \frac{(4)(0.60355) - 0.5}{4 - 1} = \frac{1.9142}{3} = 0.63806$$

$$I_{3,2} = \frac{(4^{2-1})I_{4,1} - I_{3,1}}{4^{2-1} - 1} = \frac{(4)(0.628375) - 0.60355}{4 - 1} = 0.63665$$

$$I_{4,2} = \frac{(4^{2-1})I_{5,1} - I_{4,1}}{4^{2-1} - 1} = \frac{(4)(0.6345125) - 0.628375}{4 - 1} = 0.63655$$

Por lo tanto ahora la tabla quedaría como:



n	h	K=1	K=2	K=3
1	1	0	0.6666	
2	0.5	0.5	0.63806	
4	0.25	0.60355	0.63665	
8	0.125	0.628375	0.63655	
16	0.625	0.6345125		

$$I_{jk} = \frac{(4^{k-1})I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

$$I_{1,3} = \frac{(4^{3-1})I_{2,2} - I_{1,2}}{4^{3-1} - 1} = \frac{(4)^2(0.63806) - 0.6666}{16 - 1} = 0.63615$$

$$I_{2,3} = \frac{(4^{3-1})I_{3,1} - I_{2,2}}{4^{3-1} - 1} = \frac{(4)^2(0.63665) - 0.63806}{16 - 1} = 0.636556$$

$$I_{3,3} = \frac{(4^{3-1})I_{4,2} - I_{3,2}}{4^{3-1} - 1} = \frac{(4)^2(0.63655) - 0.63665}{16 - 1} = 0.636543$$

Por lo tanto ahora la tabla quedaría como:

n	h	K=1	K=2	K=3	K=4
1	1	0	0.6666	0.63615	
2	0.5	0.5	0.63806	0.636556	
4	0.25	0.60355	0.63665	0.636543	
8	0.125	0.628375	0.63655		
16	0.625	0.6345125			

$$I_{jk} = \frac{(4^{k-1})I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

$$I_{1,4} = \frac{(4)^{4-1}I_{2,3} - I_{1,3}}{4^{4-1} - 1} = \frac{(4)^3(0.636556) - 0.63615}{(4)^3 - 1} = 0.63615$$

$$I_{2,4} = \frac{(4)^{4-1}I_{3,3} - I_{2,3}}{4^{4-1} - 1} = \frac{(4)^3(0.636543) - 0.636556}{(4)^3 - 1} = 0.636542$$

Por lo tanto ahora la tabla quedaría como:

n	h	K=1	K=2	K=3	K=4	K=5
1	1	0	0.6666	0.63615	0.636562	
2	0.5	0.5	0.63806	0.636556	0.636542	
4	0.25	0.60355	0.63665	0.636543		
8	0.125	0.628375	0.63655			
16	0.625	0.6345125				

$$I_{jk} = \frac{(4^{k-1})I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

$$I_{1,5} = \frac{(4^{5-1})I_{2,4} - I_{1,4}}{4^{5-1} - 1} = \frac{(4)^4(0.636542) - 0.636562}{(4)^4 - 1}$$

$$I_{1,5} = \frac{256(0.636542) - 0.636562}{256 - 1} = 0.636541$$

Por lo tanto la tabla quedaría como:

n	h	K=1	K=2	K=3	K=4	K=5
1	1	0	0.6666	0.63615	0.636562	0.635641
2	0.5	0.5	0.63806	0.636556	0.636542	
4	0.25	0.60355	0.63665	0.636543		
8	0.125	0.628375	0.63655			

16	0.625	0.6345125				
----	-------	-----------	--	--	--	--

$$\%Error = \left| \frac{V_{actual} - V_{anterior}}{V_{actual}} \right| * 100 = \left| \frac{0.636541 - 0.636542}{0.636541} \right| * 100 = 0.0001$$

## Algoritmo del Método de Integración de Romberg

### Método de Romberg

For I:=1 to 5 do

Begin

A[I,1]:=Trapezio(Dos a la I(I)) ;Equivaldría a 2i

End;

For k:= 2 to 5 do ;Donde el  $\Delta$  llega a 5

Begin

For J:=1 to 5 do ;Donde 5 es el # de integrales

$I[j,k] := (4^{k-1} * I[j+1,k+1] - I[j,k-1]) / (4^{k-1} - 1)$  ;Puede usarse  $cuatrok\_1(k)$

%Error

End;

[Regreso a la página principal.](#)



## 5.3.2 Fórmulas de Gauss-Legendre

Las fórmulas de Gauss-Legendre, son fórmulas que permiten calcular una integral. Estas fórmulas tienen la forma general:

$$I = \sum_{i=1}^{1+1} c_i f(x_i)$$

Para poder aplicar estas fórmulas, se requiere desde luego conocer los valores de  $c_i$  y  $f(x_i)$ .

Veamos cual es la fórmula de Gauss-Legendre para cuando  $n=1$ , es decir:

$$I = \sum_{i=1}^{1+1} c_i f(x_i) = \sum_{i=1}^2 c_i f(x_i)$$

$$I = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

Desde luego que en toda ecuación no conocemos  $c_1$ , ni  $c_2$ , ni  $f(x_1)$ , ni  $f(x_2)$ .

Lo que vamos a hacer ahora es encontrar el valor de las incognitas para aproximar la integral a modo de Trapecio pero de manera tal que la línea de la fórmula de Gauss-Legendre, no contenga tanto error.

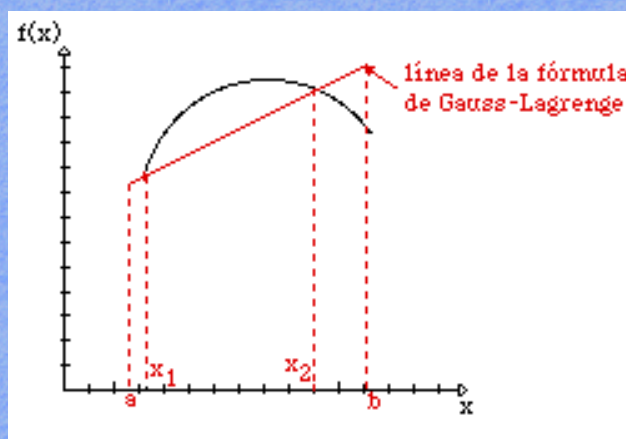
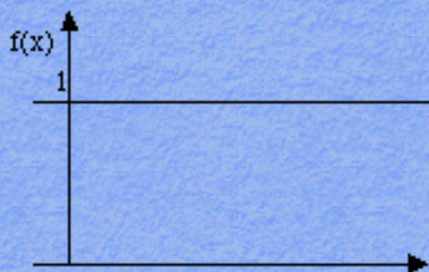


Figura 5.27.- Línea de la fórmula de Gauss-Legendre

Para poder conocer las cuatro incognitas  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $f(x_1)$  y  $f(x_2)$  tenemos necesidad de conocer cuatro ecuaciones.

Para la primera ecuación, tomemos  $y=f(x)=1$



y busquemos la integral de:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (1) dx = \int_{-1}^1 dx = 2$$

$$\therefore \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

Como la  $f(x)$  siempre es igual a uno, independientemente del valor de  $x$ , entonces  $f(x_1)=1$  y  $f(x_2)=1$

$$\therefore 2 = c_1 (1) + c_2 (1)$$

$$c_1 + c_2 = 2$$

Para la segunda ecuación. Hagamos:

$y=f(x)=x$  y obtengamos nuevamente

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 0$$

$$\therefore \int_{-1}^1 f(x) dx = 0 = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$f(x_1) = x_1$$

$$f(x_2) = x_2$$

$$\therefore c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$$

Para la tercera ecuación. Hagamos:

$y=f(x)=x^2$  y obtengamos nuevamente

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{2}{3} = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$f(x_1) = x_1^2$$

$$f(x_2) = x_2^2$$

$$\therefore c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \frac{2}{3}$$

para la cuarta ecuación. Hagamos:

$y=f(x)=x^3$  y obtengamos nuevamente



$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\therefore \int_{-1}^1 f(x) dx = 0 = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$f(x_1) = x_1^3$$

$$f(x_2) = x_2^3$$

$$\therefore c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0$$

Ahora ya tenemos cuatro ecuaciones con 4 incógnitas: Es un SENL (Sistema de Ecuaciones no Lineales).

$$c_1 + c_2 = 2$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$$

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = 2/3$$

$$c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0$$

Resolviendo este sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas se obtiene:

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = 1$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Entonces la fórmula de Gauss-Legendre quedará:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

Ahora bien, la fórmula anterior de Gauss-Legendre tiene un grado de precisión tres, esto es, produce el resultado exacto con cada polinomio de grado tres o menor.

Ahora bien, una integral  $\int_a^b f(x) dx$  en un intervalo arbitrario  $[a, b]$  se puede transformar en otra en  $[-1, 1]$  usando el cambio de variable siguiente:

$$x = a_0 + a_1 t$$

donde

$$a_0 = (b+a) / 2$$

$$a_1 = (b-a) / 2$$

y además  $dx = a_1 dt$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a) + (b+a)}{2}\right) \frac{(b-a)}{2} dt$$



Ejemplo:

Resolver la siguiente integral

$$\int_0^{0.8} (0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5) dx$$

Solución:

Primero obtengamos  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $x$  y  $dx$

$$a_0 = (b+a) / 2 = (0.8+0) / 2 = 0.4$$

$$a_1 = (b-a) / 2 = (0.8-0) / 2 = 0.4$$

$$x = a_0 + a_1 t = 0.4 + 0.4t$$

donde  $t$  es:

$$t = (x - 0.4) / 0.4$$

$$dx = a_1 dt = 0.4 dt$$

$$\therefore \int_0^{0.8} (0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5) dx$$

con el cambio de variable se transforma en:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{x-0.4}{0.4} = \frac{0.8-0.4}{0.4} = \frac{0.4}{0.4} = 1 \\ -1 &= \frac{x-0.4}{0.4} = \frac{0-0.4}{0.4} = \frac{-0.4}{0.4} = -1 \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 [0.2 + 25(0.4 + 0.4t) - 200(0.4 + 0.4t)^2 + 675(0.4 + 0.4t)^3 - 900(0.4 + 0.4t)^4 + 400(0.4 + 0.4t)^5] 0.4 dt$$

$$\int_{-1}^1 [0.2 + 25(0.4 + 0.4t) - 200(0.4 + 0.4t)^2 + 675(0.4 + 0.4t)^3 - 900(0.4 + 0.4t)^4 + 400(0.4 + 0.4t)^5] 0.4 dt$$

$$\int_{-1}^1 [0.08 + 10(0.4 + 0.4t) - 80(0.4 + 0.4t)^2 + 270(0.4 + 0.4t)^3 - 360(0.4 + 0.4t)^4 + 160(0.4 + 0.4t)^5] dt$$

Esta última ecuación ya se puede integrar utilizando la fórmula de Gauss-Legendre, ya que los límites superior é inferior están entre -1 y 1. Desde luego esto es independiente de que la variable sea  $t$  en lugar de  $x$ .

$$f(t) = 0.08 + 10(0.4 + 0.4t) - 80(0.4 + 0.4t)^2 + 270(0.4 + 0.4t)^3 - 360(0.4 + 0.4t)^4 + 160(0.4 + 0.4t)^5$$

Evalúemos ahora  $f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$  y  $f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0.51674 = f(t_1)$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 1.30583 = f(t_2)$$

$$\therefore \int_{-1}^1 f(t) dt = c_1 f(t_1) + c_2 f(t_2)$$

donde

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = 1$$

$$\therefore \int_{-1}^1 f(t) dt = 0.51674 + 1.30583$$

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = 1.82257$$

La fórmula de Gauss-Legendre sirve para cuando  $n=1$  es decir para cuando se tiene dos puntos.

De forma similar se pueden obtener fórmulas de **Gauss-Legendre para  $n=2$  (3 puntos),  $n=3$  (4 puntos),  $n=5$  (6 puntos)**, etc.

La siguiente tabla contiene para cuando  $n=1,2,3,4,5,6..$

n	Número de puntos	Raíces $x_i$	Coefficientes $c_i$
1	2	0.5773502692	1.0000000000
		-0.5773502692	1.0000000000
2	3	0.7745966692	0.5555555556
		0.0000000000	0.8888888889
		-0.7745966692	0.5555555556
3	4	0.8611363116	0.3478548451
		0.3399810436	0.6521451549
		-0.3399810436	0.6521451549
		-0.8611363116	0.3478548451



4	5	0.9061798459	0.2369268850
		0.5384693101	0.4786286705
		0.0000000000	0.5688888889
		-0.5384693101	0.4786286705
		-0.9061798459	0.2369268850

$$I = \sum_{i=1}^{n+1} c_i f(x_i)$$

Ejercicio:

Encontrar  $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x dx$  por el método de Gauss Legendre, probar varios valores de n

hasta que:  $\left| \frac{V_{act} - V_{ant}}{V_{act}} \right| * 100 < 0.05$

Solución:

Primero hagamos el cambio de variable para poder integrar entre 1 y -1.

$$a_0 = \frac{b+a}{2} = \frac{\pi/4 + 0}{2} = \frac{\pi}{8} \Rightarrow a_0 = 0.39$$

$$a_1 = \frac{b-a}{2} = \frac{\pi/4 + 0}{2} = \frac{\pi}{8} \Rightarrow a_1 = 0.39$$

$$x = a_0 + a_1 t = 0.39 + 0.39t \Rightarrow x = 0.39 + 0.39t$$

$$dx = a_1 dt = 0.39 dt \Rightarrow dx = 0.39 dt$$

de x se despeja  $t = (x - 0.39) / 0.39$  para calcular los límites. Substituyendo los valores que se encontraron para poder efectuar la integral entre 1 y -1.

$$\frac{x-0.39}{0.39} = \frac{\pi/4 - 0.39}{0.39} = 1$$

$$\frac{x-0.39}{0.39} = \frac{0 - 0.39}{0.39} = -1$$

$$\int_{-1}^1 0.39 \left\{ e^{3(0.39+0.39t)} \sin 2(0.39 + 0.39t) \right\} 0.39 dt$$

$$\int_{-1}^1 0.39 \left\{ e^{(1.17+1.17t)} \sin(0.78 + 0.78t) \right\} dt$$

La integral anterior ya se puede evaluar utilizando la fórmula de Gauss-Legendre, ya que los límites superior e inferior están entre 1 y -1. Desde luego esto es independiente de que la variable sea t en lugar de x.



$$f(t) = 0.39 \left\{ e^{(1.17+1.17t)} \text{sen}(0.78 + 0.78t) \right\}$$

$$\text{Evaluando en: } f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

$$y: f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = 0.5773502692$$

o sea que vamos a evaluar en  $f(0.5773502692)$  y  $f(-0.5773502692)$

$$f(0.5773502692) = 0.39 \left\{ e^{(1.17+1.17(0.5773502692))} \text{sen}(0.78 + 0.78(0.5773502692)) \right\}$$

$$f(0.5773502692) = 0.39 \left\{ e^{1.8454} \text{sen}(1.23) \right\} = 0.39 \{ 6.3306 * 0.94248 \}$$

$$f(0.5773502692) = 0.39 \{ 5.9664 \}$$

$$f(0.5773502692) = 2.3268 = f(t_1)$$

$$f(-0.5773502692) = 0.39 \left\{ e^{(1.17+1.17(-0.5773502692))} \text{sen}(0.78 + 0.78(-0.5773502692)) \right\}$$

$$f(-0.5773502692) = 0.39 \left\{ e^{0.4945} \text{sen}(0.3296) \right\} = 0.39 \{ 1.6396 * 0.3236 \}$$

$$f(-0.5773502692) = 0.39 \{ 0.53057 \} = 0.2069$$

$$f(-0.5773502692) = 0.2069 = f(t_2)$$

$$\therefore \int_{-1}^1 f(t) dt = c_1 f(t_1) + c_2 f(t_2)$$

donde

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = 1$$

$$f(t_1) = 2.3268$$

$$f(t_2) = 0.2069$$

$$\therefore \int_{-1}^1 f(t) dt = (1)(2.3268) + (1)(0.2069)$$

$$\therefore \int_{-1}^1 f(t) dt = 2.5337$$

Repitamos el ejercicio pero ahora con  $n=2$ .

$$\int_0^{\pi/4} e^{3x} \text{sen} 2x dx = \int_{-1}^1 0.39 \left\{ e^{(1.17+1.17t)} \text{sen}(0.78 + 0.78t) \right\} dt$$

Evaluemos ahora  $f(t_1=0.7745966692)$ ;  $f(t_2=0)$ ;  $f(t_3=-0.7745966692)$

$$f(0.7745966692) = 0.39 \left\{ e^{(1.17+1.17(0.7745966692))} \text{sen}(0.78 + 0.78(0.7745966692)) \right\}$$

$$f(0.7745966692) = 0.39 \left\{ e^{2.0762} \text{sen}(1.3841) \right\} = 0.39 \{ 7.9741 * 0.9826 \}$$

$$f(0.7745966692) = 0.39 \{ 7.8353 \} = 3.0557$$

$$f(t_1) = 3.0557$$

$$f(0) = 0.39 \left\{ e^{(1.17+1.17(0))} \text{sen}(0.78 + 0.78(0)) \right\}$$

$$f(0) = 0.39 \left\{ e^{1.17} \text{sen}(0.78) \right\} = 0.39 \{ 3.2219 * 0.7032 \}$$

$$f(0) = 0.39 \{ 2.2656 \} = 0.8835$$

$$f(t_2) = 0.8835$$

$$f(-0.7745966692) = 0.39 \left\{ e^{(1.17+1.17(-0.7745966692))} \text{sen}(0.78 + 0.78(-0.7745966692)) \right\}$$

$$f(-0.7745966692) = 0.39 \left\{ e^{0.2637} \text{sen}(0.1758) \right\} = 0.39 \{ 1.3017 * 0.1748 \}$$

$$f(-0.7745966692) = 0.39 \{ 0.2275 \} = 0.0887$$

$$f(t_3) = 0.0887$$

$$\therefore \int_{-1}^1 f(t) dt = c_1 f(t_1) + c_2 f(t_2) + c_3 f(t_3)$$

donde

$$c_1 = 0.5555555556$$

$$c_2 = 0.8888888889$$

$$c_3 = 0.5555555556$$

$$f(t_1) = 3.0557$$

$$f(t_2) = 0.8835$$

$$f(t_3) = 0.0887$$

Sustituyendo \_valores :

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = (0.5555555556)(3.0557) + (0.8888888889)(0.8835) + (0.5555555556)(0.0887)$$

$$\therefore \int_{-1}^1 f(t) dt = 1.6976 + 0.7853 + 0.0493 \Rightarrow \int_{-1}^1 f(t) dt = 2.5322$$

$$\left| \frac{V_{act} - V_{ant}}{V_{act}} \right| * 100 = \left| \frac{2.5322 - 2.5337}{2.5322} \right| * 100 = 0.059\%$$

Repitamos el ejercicio pero ahora con n=3.

$$\begin{aligned}
f(0.8611363116) &= 0.39 \left\{ e^{(1.17+1.17(0.8611363116))} \text{sen}(0.78 + 0.78(0.8611363116)) \right\} \\
f(0.8611363116) &= 0.39 \left\{ e^{2.1775} \text{sen}(1.4516) \right\} = 0.39 \{ 8.8242 * 0.9929 \} \\
f(0.8611363116) &= 0.39 \{ 8.7615 \} = 3.4169 \\
f(t_1) &= 3.4169 \\
f(0.3399810436) &= 0.39 \left\{ e^{(1.17+1.17(0.3399810436))} \text{sen}(0.78 + 0.78(0.3399810436)) \right\} \\
f(0.3399810436) &= 0.39 \left\{ e^{1.5677} \text{sen}(1.0451) \right\} = 0.39 \{ 4.7956 * 0.8649 \} \\
f(0.3399810436) &= 0.39 \{ 4.1477 \} = 1.6176 \\
f(t_2) &= 1.6176 \\
f(-0.3399810436) &= 0.39 \left\{ e^{(1.17+1.17(-0.3399810436))} \text{sen}(0.78 + 0.78(-0.3399810436)) \right\} \\
f(-0.3399810436) &= 0.39 \left\{ e^{0.7722} \text{sen}(0.5148) \right\} = 0.39 \{ 2.1645 * 0.4923 \} \\
f(-0.3399810436) &= 0.39 \{ 1.0655 \} = 0.4155 \\
f(t_3) &= 0.4155 \\
f(-0.8611363116) &= 0.39 \left\{ e^{(1.17+1.17(-0.8611363116))} \text{sen}(0.78 + 0.78(-0.8611363116)) \right\} \\
f(-0.8611363116) &= 0.39 \left\{ e^{0.1624} \text{sen}(0.1083) \right\} = 0.39 \{ 1.1763 * 0.1080 \} \\
f(-0.8611363116) &= 0.39 \{ 0.1270 \} = 0.04953 \\
f(t_4) &= 0.04953
\end{aligned}$$

Aquí nos paramos, ya que:

$$\left| \frac{V_{\text{act}} - V_{\text{ant}}}{V_{\text{act}}} \right| < 0.05\%$$

Ejemplo:

Integrar la función  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  en el intervalo  $(-0.8, 1.5)$  por las fórmulas de Gauss-Legendre, con un  $\xi = 0.0025$

Solución: Con  $n=1$  o sea con 2 puntos. Primero obtengamos  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $x$  y  $dx$ .

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{b+a}{2} = \frac{1.5 + (-0.8)}{2} = 0.35 \Rightarrow a_0 = 0.35 \\
a_1 &= \frac{b-a}{2} = \frac{1.5 - (-0.8)}{2} = 1.15 \Rightarrow a_1 = 1.15 \\
x &= a_0 + a_1 t = 0.35 + 1.15t \Rightarrow x = 0.35 + 1.15t \\
dx &= a_1 dt = 1.15 dt \Rightarrow dx = 1.15 dt \\
\therefore \int_{-0.8}^{1.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx
\end{aligned}$$

Con el cambio de variable se transforma en:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(0.35+1.15t)^2/2} (1.15) dt$$



Por lo tanto la ecuación que deseamos integrar es:

$$0.45878 \int_{-1}^1 e^{-\frac{(0.35+1.15x)^2}{2}} dt$$

$$\therefore f(t) = e^{-\frac{(0.35+1.15x)^2}{2}}$$

Esta última ecuación ya se puede integrar utilizando la fórmula de Gauss-Legendre, ya que los límites superior e inferior están entre 1 y -1. Desde luego esto es independiente de que la variable sea t en lugar de x.

Evaluemos ahora  $f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$  y  $f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = e^{-\frac{(0.35+1.15t)^2}{2}} = e^{-0.514060} = 0.598068 = f(t_1)$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = e^{-\frac{(0.35+1.15(-\sqrt{1/3}))^2}{2}} = e^{-0.049283} = 0.951911 = f(t_2)$$

$$\text{Además : } c_1 = 1$$

$$c_2 = 1$$

$$\therefore \int_{-1}^1 e^{-\frac{(0.35+1.15t)^2}{2}} dt = c_1 f(t_1) + c_2 f(t_2) = (1)(0.598068) + (1)(0.951911) = 1.549979$$

sin embargo, como la integral esta premultiplicada por 0.45878, el valor final será:

$$0.45878 \int_{-1}^1 e^{-\frac{(0.35+1.15t)^2}{2}} dt = (0.45878)(1.549979) = 0.711099$$

$$0.45878 \int_{-1}^1 e^{-\frac{(0.35+1.15t)^2}{2}} dt = 0.711099$$

Repitamos el ejercicio con n=2 ó sea con 3 puntos. La ecuación que vamos a integrar es:

$$0.45878 \int_{-1}^1 e^{-\frac{(0.35+1.15t)^2}{2}} dt$$

$$\therefore f(t) = e^{-\frac{(0.35+1.15x)^2}{2}}$$

Evaluemos ahora  $f(0.7745966692)$ ,  $f(0)$ ,  $f(-0.7745966692)$

$$f(0.7745966692) = e^{-\frac{(0.35+1.15*0.7745966692)^2}{2}} = e^{-0.769775}$$

$$f(0.7745966692) = 0.463117 = f(t_1)$$

$$f(0) = e^{-\frac{(0.35+1.15*0)^2}{2}} = e^{-0.06125} = 0.940588$$

$$f(0) = 0.940588 = f(t_2)$$

$$f(-0.7745966692) = e^{-\frac{(0.35+1.15*(-0.7745966692))^2}{2}} = e^{-0.146224}$$

$$f(-0.7745966692) = 0.863964 = f(t_3)$$

Además:

$$c_1 = 0.5555555556$$

$$c_2 = 0.8888888889$$

$$c_3 = 0.5555555556$$

$$\int_{-1}^1 e^{-\frac{(0.35+1.15t)^2}{2}} dt = c_1 f(t_1) + c_2 f(t_2) + c_3 f(t_3)$$

$$= 0.5555555556 * (0.463117) + 0.8888888889 * (0.940588) + 0.5555555556 * (0.863964) =$$

$$= 1.573345$$

Sin embargo como la integral esta premultiplicada por 0.45878, el valor final de la integral será:

$$0.45878 \int_{-1}^1 e^{-\frac{(0.35+1.15t)^2}{2}} dt = (0.45878)(1.0573345) = 0.721819$$

Repitamos el ejercicio con  $n=3$  ó sea con 4 puntos. La ecuación que vamos a integrar es:

$$0.45878 \int_{-1}^1 e^{-\frac{(0.35+1.15t)^2}{2}} dt$$

$$\therefore f(t) = e^{-\frac{(0.35+1.15t)^2}{2}}$$

Evaluemos ahora  $f(0.8611363116)$ ,  $f(0.3399810436)$ ,  $f(-0.3399810436)$ ,  $f(-0.8611363116)$

$$f(0.8611363116) = 0.407297 = f(t_1)$$

$$f(0.3399810436) = 0.759933 = f(t_2)$$

$$f(-0.3399810436) = 0.999160 = f(t_3)$$

$$f(-0.8611363116) = 0.814650 = f(t_4)$$

además:

$$c_1 = 0.3478548451$$



$$c_2=0.6521451549$$

$$c_3=0.6521451549$$

$$c_4=0.3478548451$$

$$\int_{-1}^1 e^{-\frac{(0.35+1.15t)^2}{2}} dt = c_1 f(t_1) + c_2 f(t_2) + c_3 f(t_3) + c_4 f(t_4)$$

$$\int_{-1}^1 e^{-\frac{(0.35+1.15t)^2}{2}} dt = 1.572244$$

Sin embargo como la integral esta premultiplicada por 0.45878, el valor final de la integral será:

$$0.45878 \int_{-1}^1 e^{-\frac{(0.35+1.15t)^2}{2}} dt = (0.45878)(1.572244)$$

$$0.45878 \int_{-1}^1 e^{-\frac{(0.35+1.15t)^2}{2}} dt = 0.721314$$

Repitamos el ejercicio con  $n=4$  ó sea con 5 puntos. La ecuación que vamos a integrar es:

$$0.45878 \int_{-1}^1 e^{-\frac{(0.35+1.15t)^2}{2}} dt$$

$$\therefore f(t) = e^{-\frac{(0.35+1.15t)^2}{2}}$$

Evaluemos ahora  $f(0.9061798459)$ ,  $f(0.5384693101)$ ,  $f(0)$ ,  $f(-0.5384693101)$ ,  $f(-0.9061798459)$

$$f(0.9061798459)=0.379469=f(t_1)$$

$$f(0.5384693101)=0.625181=f(t_2)$$

$$f(0)=0.940588=f(t_3)$$

$$f(-0.5384693101)=0.964403=f(t_4)$$

$$f(-0.9061798459)=0.787016=f(t_5)$$

además:

$$c_1=0.236926885$$

$$c_2=0.4786286705$$

$$c_3=0.5688888889$$

$$c_4=0.4786286705$$

$$c_5=0.2369268850$$

$$\int_{-1}^1 e^{-\frac{(0.35+1.15t)^2}{2}} dt = c_1 f(t_1) + c_2 f(t_2) + c_3 f(t_3) + c_4 f(t_4) + c_5 f(t_5)$$

$$\int_{-1}^1 e^{-\frac{(0.35+1.15t)^2}{2}} dt = 1.572282$$



Sin embargo como la integral esta premultiplicada por 0.45878, el valor final de la integral será:

$$0.45878 \int_{-1}^1 e^{-\frac{(0.35+1.15t)^2}{2}} dt = (0.45878)(1.572282)$$

$$0.45878 \int_{-1}^1 e^{-\frac{(0.35+1.15t)^2}{2}} dt = 0.721331$$

$$ERA = \left| \frac{V_{act} - V_{ant}}{V_{ant}} \right| * 100 = \left| \frac{0.721331 - 0.721314}{0.721331} \right| * 100$$

$$ERA = 0.002356\% < \xi$$

$$\therefore \int_{-0.8}^{1.5} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx = 0.721331$$

[Regreso a la página principal.](#)

# 6 DIFERENCIACION

## 6.1 Operadores en Diferencia

Existen operadores en diferencia que se utilizan en algunas de las fórmulas para calcular la derivada de una función.

Por ejemplo:

Considere  $f(x)$  una función en la variable  $x$ . El operador en diferencia  $\Delta f(x_i)$ , significa:

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

Las potencias más  $\Delta^k f(x_i)$  se definen recursivamente por medio de:

$$\Delta^k f(x_i) = \Delta (\Delta^{k-1} f(x_i)) \text{ para } k \geq 2$$

Esta definición anterior significa que:

$$\Delta^2 f(x_i) = \Delta (\Delta f(x_i)) = \Delta [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i) = [f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})] - [f(x_{i+1}) - f(x_i)]$$

$$\Delta^2 f(x_i) = f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)$$

Ahora para  $\Delta^3 f(x_i)$

$$\Delta^3 f(x_i) = \Delta [\Delta^2 f(x_i)] = \Delta [f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)]$$

$$\Delta^3 f(x_i) = \Delta f(x_{i+2}) - 2\Delta f(x_{i+1}) + \Delta f(x_i)$$

$$\Delta^3 f(x_i) = [f(x_{i+3}) - f(x_{i+2})] - 2[f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})] + [f(x_{i+1}) - f(x_i)]$$

$$\Delta^3 f(x_i) = f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 2f(x_{i+1}) + f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

$$\Delta^3 f(x_i) = f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

Ahora para  $\Delta^4 f(x_i)$

$$\Delta^4 f(x_i) = \Delta [\Delta^3 f(x_i)] = \Delta [f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)]$$

$$\Delta^4 f(x_i) = \Delta f(x_{i+3}) - 3\Delta f(x_{i+2}) + 3\Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i)$$

$$\Delta^4 f(x_i) = [f(x_{i+4}) - f(x_{i+3})] - 3[f(x_{i+3}) - f(x_{i+2})] + 3[f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})] - [f(x_{i+1}) - f(x_i)]$$

$$\Delta^4 f(x_i) = f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)$$

Así sucesivamente se podría calcular  $\Delta^5 f(x_i)$ ,  $\Delta^6 f(x_i)$ , etc...

Usualmente en lugar de escribir  $\Delta f(x_i)$ ,  $\Delta^2 f(x_i)$ ,  $\Delta^3 f(x_i)$ , ...etc, solo se escribe  $\Delta f$ ,  $\Delta^2 f$ ,  $\Delta^3 f$ , ...,etc. Es decir, se asume que la función en  $x$ , esta evaluada en  $x_i$ , o se  $f(x_i)$ .

Por otro lado, para evaluar los operadores en diferencia se requiere conocer la función  $f(x)$  o una tabla de  $x$  contra  $f(x)$ . Para ilustrar la aplicación de estos operadores en diferencia consideremos la siguiente tabla, en la cual deseamos evaluar  $\Delta f$  y  $\Delta^2 f$  para  $x_i = 3$



	x	f(x)	
	0	1	
	1.5	3	
$x_i$	3	-1	$f(x_i)$
$x_{i+1}$	4.5	-6	$f(x_{i+1})$
$x_{i+2}$	6	1	$f(x_{i+2})$

Figura 6.1.- Evaluación de los incrementos.

$$\Delta f = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

$$\Delta f = -6 - (-1) \quad ? \Delta f = -5$$

$$\Delta^2 f = f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)$$

$$\Delta^2 f = 1 - 2(-6) + (-1)$$

$$\Delta^2 f = 1 + 12 - 1$$

$$\Delta^2 f = 12$$

Ejemplo:

Dada la función

$$f(x) = x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x + 1$$

generar una tabla de x contra f(x) para valores de x desde 0 hasta 10. Una vez generada la tabla, obtenga  $\Delta f$ ,  $\Delta^2 f$ ,  $\Delta^3 f$ ,  $\Delta^4 f$  y  $\Delta^5 f$  para  $x_i = 5$

Solución:

Primero vamos a generar la tabla de x contra f(x).

$$f(x) = x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x + 1$$

$$f(0) = (0)^5 + 3(0)^4 + 4(0)^3 + 2(0)^2 + (0) + 1 = 1$$

$$f(1) = (1)^5 + 3(1)^4 + 4(1)^3 + 2(1)^2 + (1) + 1 = 12$$

$$f(2) = (2)^5 + 3(2)^4 + 4(2)^3 + 2(2)^2 + (2) + 1 = 123$$

$$f(3) = (3)^5 + 3(3)^4 + 4(3)^3 + 2(3)^2 + (3) + 1 = 616$$

$$f(4) = (4)^5 + 3(4)^4 + 4(4)^3 + 2(4)^2 + (4) + 1 = 2085$$

$$f(5) = (5)^5 + 3(5)^4 + 4(5)^3 + 2(5)^2 + (5) + 1 = 5556$$

$$f(6) = (6)^5 + 3(6)^4 + 4(6)^3 + 2(6)^2 + (6) + 1 = 12607$$

$$f(7) = (7)^5 + 3(7)^4 + 4(7)^3 + 2(7)^2 + (7) + 1 = 25488$$

$$f(8) = (8)^5 + 3(8)^4 + 4(8)^3 + 2(8)^2 + (8) + 1 = 47241$$

$$f(9) = (9)^5 + 3(9)^4 + 4(9)^3 + 2(9)^2 + (9) + 1 = 81820$$

$$f(10) = (10)^5 + 3(10)^4 + 4(10)^3 + 2(10)^2 + (10) + 1 = 134211$$

Ahora generamos la tabla:



	x	f(x)	
	0	1	
	1	12	
	2	123	
	3	616	
	4	2085	
$x_i \Rightarrow$	5	5556	$\Leftarrow f(x_i)$
$x_{i+1} \Rightarrow$	6	12607	$\Leftarrow f(x_{i+1})$
$x_{i+2} \Rightarrow$	7	25488	$\Leftarrow f(x_{i+2})$
$x_{i+3} \Rightarrow$	8	47241	$\Leftarrow f(x_{i+3})$
$x_{i+4} \Rightarrow$	9	81820	$\Leftarrow f(x_{i+4})$
$x_{i+5} \Rightarrow$	10	134211	$\Leftarrow f(x_{i+5})$

Figura 6.2.- Evaluación de los incrementos

Usando las ecuaciones dadas en clase para  $x_i=5$ :

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_{i+1}) - f(x_i) \\ \Delta f &= 12607 - 5556 \\ \Delta f &= 7051 \\ \Delta^2 f &= f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i) \Rightarrow \Delta^2 f = 25488 - 2(12607) + 5556 \\ \Delta^2 f &= \underline{\underline{5830}} \\ \Delta^3 f &= f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i) \\ \Delta^3 f &= 47241 - 3(25488) + 3(12607) - 5556 \\ \Delta^3 f &= 3042 \\ \Delta^4 f &= f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i) \\ \Delta^4 f &= 81820 - 4(47241) + 6(25488) - 4(12607) + 5556 \\ \Delta^4 f &= 912\end{aligned}$$

En los apuntes de clase no se tiene  $\Delta^5 f$ , por tanto, vamos a desarrollar esta ecuación:

$$\begin{aligned}\Delta^5 f &= \Delta(\Delta^4 f) = \Delta[f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)] = \\ &= [f(x_{i+5}) - f(x_{i+4})] - 4[f(x_{i+4}) - f(x_{i+3})] + 6[f(x_{i+3}) - f(x_{i+2})] \\ &\quad - 4[f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})] + [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \\ \Delta^5 f &= f(x_{i+5}) - 5f(x_{i+4}) + 10f(x_{i+3}) - 10f(x_{i+2}) + 5f(x_{i+1}) - f(x_i) \\ \Delta^5 f &= 134211 - 5(81820) + 10(47241) - 10(25488) + 5(12607) - 5556 \\ \Delta^5 f &= 120\end{aligned}$$

[Regreso a la página principal.](#)

## 6.2 Fórmulas de Diferencia hacia Adelante

Según el teorema de Taylor:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

Desarrollando la suma de la serie de Taylor:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots$$

Tomando dos puntos:

$$a = x_i$$

$$x = x_{i+1}$$

y sustituyendo en la serie de Taylor desarrollada:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)}{1!} + \frac{f''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} + \dots$$

Tomando solo dos términos:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)}{1!}$$

Despejando  $f'(x_i)$ :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} = \frac{\Delta f}{h}$$

La anterior es la fórmula con diferencias hacia adelante ó fórmula de dos puntos.

En general se puede encontrar la derivada de una función no solo con la fórmula de dos puntos, si no que se puede emplear la fórmula para 3 puntos, para 4 puntos, para 5 puntos, etc.

La fórmula general para 2 puntos, 3 puntos, 4 puntos, 5 puntos, etc es:

$$f'(x^i) = \frac{1}{h} \left[ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2 puntos}}}{\Delta f} - \frac{1}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3 puntos}}}{\Delta^2 f} + \frac{1}{3} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{4 puntos}}}{\Delta^3 f} - \frac{1}{4} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{5 puntos}}}{\Delta^4 f} + \dots \right]$$

Ejercicio:

Por el método de Diferencia hacia adelante encontrar la derivada de la función evaluada en  $x=1$ ; es decir,  $f'(1)=?$ .

Para resolver este ejercicio utilice la siguiente tabla:

	x	f(x)	
$x_i$	1	1	$f(x_i)$
$x_{i+1}$	1.1	1.331	$f(x_{i+1})$
$x_{i+2}$	1.2	1.728	$f(x_{i+2})$

} 3 puntos

Figura6.1.-Tabla1

Solución:



		$\Delta f$	$\Delta^2 f$
x	f(x)		
1	1		
1.1	1.331	0.331	
1.2	1.728	0.397	0.066

$$\Delta f = f(x_{i+1}) - f(x_i) = 1.331 - 1 = 0.331$$

$$\Delta^2 f = [f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})] - [f(x_{i+1}) - f(x_i)]$$

$$\Delta^2 f = f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i) = 1.728 - 2(1.331) + 1 = 0.066$$

Aplicando la fórmula general:

$$f'(x_i) = \frac{1}{h} \left[ \Delta f - \frac{1}{2} \Delta^2 f \right]$$

con

$$h = x_{i+1} - x_i = 1.1 - 1 = 1.2 - 1.1 = 0.1$$

$$h = 0.1$$

$$f'(x_i) = \frac{1}{0.1} \left[ \Delta f - \frac{1}{2} \Delta^2 f \right]$$

$$\Delta f = 0.331$$

$$\Delta^2 f = 0.066$$

$$\therefore f'(x_i) = 10 \left[ 0.331 - \frac{1}{2} (0.066) \right]$$

$$x_i = 1$$

$$f'(1) = 10[0.331 - 0.033]$$

$$f'(1) = 10(0.298)$$

$$f'(1) = 2.98$$

Ejercicio:

Por el método de diferencias hacia adelante encontrar la derivada de la función  $f(x)$  para cuando  $x=0$ , o sea encontrar  $f'(x)$ . Para resolver este ejercicio utilice la siguiente tabla de  $x$  y  $f(x)$ .

		x	f(x)		
		-2	0.7		
		-1	0.8		
$x_i$	$\Rightarrow$	0	3.0	$\Leftarrow$	$f(x_i)$
$x_{i+1}$	$\Rightarrow$	1	1.5	$\Leftarrow$	$f(x_{i+1})$
$x_{i+2}$	$\Rightarrow$	2	0.3	$\Leftarrow$	$f(x_{i+2})$
$x_{i+3}$	$\Rightarrow$	3	0	$\Leftarrow$	$f(x_{i+3})$

Figura 6.2- Tabla2

Solución:



x	f(x)	$\Delta f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
-2	0.7			
-1	0.8			
0	3.0			
1	1.5	-1.5	0.3	
2	0.3	-1.2	0.9	0.6
3	0	-0.3		

$$\Delta^3 f = [f(x_{i+3}) - f(x_{i+2})] - [f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})] - \{[f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})] - [f(x_{i+1}) - f(x_i)]\}$$

$$\Delta^3 f = f(x_{i+3}) - 2f(x_{i+2}) + f(x_{i+1}) - [f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})] + [f(x_{i+1}) - f(x_i)]$$

$$\Delta^3 f = f(x_{i+3}) - 2f(x_{i+2}) + f(x_{i+1}) - f(x_{i+2}) + f(x_{i+1}) + f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

$$\Delta^3 f = f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

Comprobemos el resultado anterior:

$$\Delta^3 f = 0 - 3(0.3) + 3(1.5) - 3.0 = 0 - 0.9 + 4.5 - 3$$

$$\Delta^3 f = -0.9 + 1.5 = 0.6$$

$$\Delta^3 f = 0.6$$

Aplicando la fórmula general para encontrar la derivada:

$$f'(x_i) = \frac{1}{h} \left[ \Delta f - \frac{1}{2} \Delta^2 f + \frac{1}{3} \Delta^3 f \right]$$

con

$$h = x_{i+1} - x_i = -1 - (-2) = 0 - (-1) = 1 - 0 = 2 - 1 = 3 - 2 = 1$$

$$h = 1$$

$$\Delta f = -1.5$$

$$\Delta^2 f = 0.3$$

$$\Delta^3 f = 0.6$$

$$x_i = 0$$

$$f'(0) = \frac{1}{1} \left[ -1.5 - \frac{1}{2} (0.3) + \frac{1}{3} (0.6) \right] = (-1.5 - 0.15 + 0.2)$$

$$f'(0) = -1.45$$

Ejercicio:

Por el método de diferencia hacia adelante encontrar la derivada de la función  $f(x)$  para  $x=2$ , o sea encontrar  $f'(x)$ . Para resolver este ejercicio utilice la siguiente tabla de  $x$  y  $f(x)$ .

$x_i$	$x$	$f(x)$	
$x_i$	2.0	-0.445	$f(x_i)$
$x_{i+1}$	2.1	-0.320	$f(x_{i+1})$
$x_{i+2}$	2.2	-0.302	$f(x_{i+2})$
$x_{i+3}$	2.3	-0.226	$f(x_{i+3})$
$x_{i+4}$	2.4	0.073	$f(x_{i+4})$
$x_{i+5}$	2.5	0.760	$f(x_{i+5})$
$x_{i+6}$	2.6	2	$f(x_{i+6})$

Figura 6.3.-Tabla3

Solución:

x	f(x)	$\Delta f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
2.0	-0.445	0.125			
2.1	-0.320	0.018	-0.107	0.165	0
2.2	-0.302	0.076	0.058	0.165	0
2.3	-0.226	0.299	0.223	0.165	0
2.4	0.073	0.687	0.388	0.165	
2.5	0.760	1.240	0.553		
2.6	2				

Aplicando la fórmula general para encontrar la derivada:

$$f'(x_i) = \frac{1}{h} \left[ \Delta f - \frac{1}{2} \Delta^2 f + \frac{1}{3} \Delta^3 f \right]$$

con

$$h = 2.1 - 2 = 2.2 - 2.1 = 2.3 - 2.2 = 2.4 - 2.3 = 2.5 - 2.4 = 2.6 - 2.5 = 0.1$$

$$\Delta f = 0.125$$

$$\Delta^2 f = -0.107$$

$$\Delta^3 f = 0.165$$

$$x_i = 2$$

$$f'(2) = \frac{1}{0.1} \left[ 0.125 - \frac{1}{2}(-0.107) + \frac{1}{3}(0.165) \right] = \frac{1}{0.1} [0.125 + 0.0535 + 0.055]$$

$$f'(2) = 2.335$$

Numéricamente, también se puede obtener la segunda derivada de  $f(x)$  o sea  $f''(x)$ , la tercera derivada  $f'''(x)$ , la cuarta derivada  $f^{IV}(x)$ , etc.

A continuación se presentan las ecuaciones para poder obtener dichas derivadas.

Segunda derivada.

Con 3 puntos:

$$f''(x) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} \quad \text{con 3 puntos}$$

$$f''(x) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2} \quad \text{con 4 puntos}$$

Tercera derivada:

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3} \quad \text{con 4 puntos}$$

$$f'''(x_i) = \frac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3} \quad \text{con 5 puntos}$$

Cuarta derivada:



$$f^{IV}(x_i) = \frac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4} \quad \text{con 5 puntos}$$

$$f^{IV}(x_i) = \frac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4} \quad \text{con 6 puntos.}$$

Ejercicio:

Por el método de diferencia hacia adelante, considere la siguiente función:

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x^1 + 1$$

genere una tabla de x contra f(x), para valores de x de 1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 y calcule f'(x), f''(x), f'''(x), y f<sup>IV</sup>(x), para x=1.0. Con las ecuaciones dadas anteriormente. Compruebe el resultado, sacando la derivada analítica.

Solución:

x	f(x)	$\Delta f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$	$\Delta^6 f$
1	6						
1.1	7.71561	1.71561	0.4987	0.1131	0.0168	0.0012	0
1.2	9.92992	2.21431	0.6118	0.1299	0.018	0.0012	
1.3	12.75603	2.82611	0.7417	0.1479	0.0192	0.0012	
1.4	16.32384	3.56781	0.8896	0.1671			
1.5	20.78125	4.45741	1.0567				
1.6	26.29536	5.51411					

Aplicando la fórmula general para encontrar la derivada:

$$f'(x_i) = \frac{1}{h} \left[ \Delta f - \frac{1}{2} \Delta^2 f + \frac{1}{3} \Delta^3 f - \frac{1}{4} \Delta^4 f + \frac{1}{5} \Delta^5 f \right]$$

$$h = 0.1$$

$$\Delta f = 1.71561$$

$$\Delta^2 f = 0.4987$$

$$\Delta^3 f = 0.1131$$

$$\Delta^4 f = 0.0168$$

$$\Delta^5 f = 0.0012$$

$$x_i = 1.0$$

$$f'(1) = \frac{1}{0.1} \left[ 1.71561 - \frac{1}{2}(0.4987) + \frac{1}{3}(0.1131) - \frac{1}{4}(0.0168) + \frac{1}{5}(0.0012) \right]$$

$$f'(1) = \frac{1}{0.1} [1.71561 - 0.24935 + 0.0377 - 0.0042 + 0.00024]$$

$$f'(1) = \frac{1}{0.1} [1.5]$$

$$\underline{\underline{f'(1) = 15}}$$

Comprobemos con la derivada analítica:



$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$f'(1) = 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

$$\underline{\underline{f'(1) = 15}}$$

Lo cual queda demostrado.

Ahora calculemos la segunda derivada con 3 puntos

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

$$h = 0.1$$

$$h^2 = 0.01$$

$$f(x_{i+2}) = 9.92992$$

$$f(x_{i+1}) = 7.71561$$

$$f(x_i) = 6$$

$$x_i = 1.0$$

$$f''(1) = \frac{9.92992 - 2(7.71561) + 6}{0.01}$$

$$\underline{\underline{f''(1) = 49.87}}$$

Ahora calculemos la segunda derivada con 4 puntos

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$$

$$f(x_{i+3}) = 12.75603$$

$$f''(1.0) = \frac{-12.75603 + 4(9.92992) - 5(7.71561) + 2(6)}{0.01}$$

$$f''(1) = \frac{0.3856}{0.01}$$

$$f''(1) = 38.56$$

Comprobemos el resultado con la segunda derivada analítica.

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$f''(x) = 20x^3 + 12x^2 + 6x + 2$$

$$f''(1) = 20 + 12 + 6 + 2$$

$$f''(1) = 40$$

Cálculo de la tercera derivada con 4 puntos.

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$$

$$f'''(x_i) = \frac{12.75603 - 3(9.92992) + 3(7.71561) - 6}{0.001}$$

$$f'''(1) = 113.1$$

Cálculo de la tercera derivada con 5 puntos.

$$f'''(x_i) = \frac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$$

$$f(x_{i+4}) = 16.32384$$

$$f'''(1) = \frac{-3(16.32384) + 14(12.75603) - 24(9.92992) + 18(7.71561)}{2(0.001)}$$

$$\underline{\underline{f'''(1) = 87.9}}$$

Comprobemos el resultado con la tercera derivada.

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$f''(x) = 20x^3 + 12x^2 + 6x + 2$$

$$f'''(x) = 60x^2 + 24x + 6$$

$$f'''(1) = 60 + 24 + 6$$

$$\mathbf{f'''(1) = 90}$$

Cuarta derivada con 5 puntos.

$$f^{IV}(x_i) = \frac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$$

$$f^{IV}(1) = \frac{16.32384 - 4(12.75603) + 6(9.92992) - 4(7.71561) + 6}{(0.0001)}$$

$$f^{IV}(1) = 168$$

Cuarta derivada con 6 puntos.

$$f^{IV}(x_i) = \frac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$$

$$f(x_{i+5}) = 20.78125$$

$$f^{IV}(x_i) = \frac{-2(20.78125) + 11(16.32384) - 24(12.75603) + 26(9.92992) - 14(7.71561)}{0.0001}$$

$$\underline{\underline{+3(6)}}$$

$$\underline{\underline{f^{IV}(x_i) = 144}}$$

Comprobemos el resultado con la cuarta derivada.

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$f''(x) = 20x^3 + 12x^2 + 6x + 2$$

$$f'''(x) = 60x^2 + 24x + 6$$

$$f^{IV}(x) = 120x + 24$$

$$\mathbf{f^{IV}(x) = 144}$$

## RESUMEN

$$\mathbf{f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$$

Cálculo de las derivadas evaluadas en  $x=1$ 

	<b>3 Puntos</b>	<b>4 Puntos</b>	<b>5 Puntos</b>	<b>6 Puntos</b>	<b>Analítica</b>
Primera derivada				15	15
Segunda derivada	49.87	38.56			40
Tercera derivada		113.1	87.9		90
Cuarta derivada			168	144	144

Figura 6.4.- Tabla 4

## Ejercicio:

Dada la  $f(x)=3x+2$  por el método de diferencia hacia adelante genere una tabla de  $x$  contra  $f(x)$  para valores de  $x$  de 0 a 10 con una diferencia entre cada  $x$  de uno, y calcule  $f'(5)$ .

## Solución:

$$f(x)=3x+2$$

$$f(0)=3(0)+2=2$$

$$f(1)=3(1)+2=5$$

$$f(2)=3(2)+2=8$$

$$f(3)=3(3)+2=11$$

$$f(4)=3(4)+2=14$$

$$f(5)=3(5)+2=17$$

$$f(6)=3(6)+2=20$$

$$f(7)=3(7)+2=23$$

$$f(8)=3(8)+2=26$$

$$f(9)=3(9)+2=29$$

$$f(10)=3(10)+2=32$$

$$\therefore$$



x	f(x)		
0	2		
1	5		
2	8		
3	11		
4	14		
$x_i$ →	5	17	← $f(x_i)$
$x_{i+1}$ →	6	20	← $f(x_{i+1})$
	7	23	← $f(x_{i+2})$
	8	26	← $f(x_{i+3})$
	9	29	
	10	32	

Figura 6.5.- Tabla 5

$$\Delta f = f(x_{i+1}) - f(x_i) = 20 - 17 = 3$$

$$\Delta^2 f = f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}) + f(x_i) = 23 - 2(20) + 17 = 0$$

$$\Delta^3 f = f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i) = 26 - 3(23) + 3(20) - 17 = 0$$

y así sucesivamente :  $\Delta^4 f = 0$ ,  $\Delta^5 f = 0$ , ..., etc

$$f'(5) = \frac{1}{h} \left[ \Delta f - \frac{1}{2} \Delta^2 f + \frac{1}{3} \Delta^3 f - \dots \right] = \frac{1}{1} (3) = 3$$

La primera derivada analítica:

$$f(x) = 3x + 2$$

$$f'(x) = 3$$

∴ La primera derivada es igual a 3, independiente del valor de x.

La derivada analítica, coincide con el valor de la derivada numérica. Solo  $\Delta f$  tiene valor diferente de cero. Además f(x) fue de primer grado.

Ejercicio:

Por el método de diferencias hacia adelante. Dada  $f(x) = 2x^2 + x + 4$  genere una tabla de x contra f(x) para valores de x de 0 a 10 con una diferencia entre cada x de uno, y calcule  $f'(5)$ .

		x	f(x)	
		0	4	
		1	7	
		2	14	
		3	25	
		4	40	
$x_i$	→	5	59	← $f(x_i)$
$x_{i+1}$	→	6	82	← $f(x_{i+1})$
$x_{i+2}$	→	7	109	← $f(x_{i+2})$
$x_{i+3}$	→	8	140	← $f(x_{i+3})$
		9	175	
		10	214	

Figura 6.6.- Tabla 6

$$\Delta f = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

$$\Delta f = 82 - 59$$

$$\Delta f = 23$$

$$\Delta^2 f = f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)$$

$$\Delta^2 f = 109 - 2(82) + 59$$

$$\Delta^2 f = 4$$

$$\Delta^3 f = f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

$$\Delta^3 f = 140 - 3(109) + 3(82) - 59 = 0$$

$$\Delta^4 f = 0; \Delta^5 f = 0; \dots, \text{etc}$$

$$\therefore f'(5) = \frac{1}{h} \left[ \Delta f - \frac{1}{2} \Delta^2 f + \frac{1}{3} \Delta^3 f - \frac{1}{4} \Delta^4 f + \dots \right] = \frac{1}{1} \left[ 23 - \frac{1}{2} (4) \right]$$

$$f'(5) = 21$$

La primera derivada analítica es:

$$f(x) = 2x^2 + x + 4$$

$$f'(x) = 2 \cdot 2x + 1 = 4x + 1$$

$$f'(5) = 4(5) + 1$$

$$f'(5) = 21$$

En este ejercicio se observa que la derivada obtenida numéricamente es exactamente igual a la analítica siempre y cuando se utilice  $\Delta f$  y  $\Delta^2 f$ . Si solo se hubiese utilizado  $\Delta f$ , la derivada habría sido:

$$f'(5) = \frac{1}{h} (\Delta f) = \frac{1}{1} (23)$$

$$f'(5) = 23$$

Además  $f(x)$  fue de segundo grado.

Ejercicio:

Por el método de diferencias hacia adelante. Dada  $f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 3x + 2$  genere una tabla de  $x$  contra  $f(x)$  para valores de  $x$  de 0 a 10 con una diferencia entre cada  $x$  de uno y calcule  $f'(5)$ .

$x$	$f(x)$
0	2
1	14
2	60
3	164
4	350
5	642
6	1064
7	1640
8	2394
9	3350
10	4532

$x_i \rightarrow$   
 $x_{i+1} \rightarrow$   
 $x_{i+2} \rightarrow$   
 $x_{i+3} \rightarrow$   
 $x_{i+4} \rightarrow$   
 $x_{i+5} \rightarrow$

$\leftarrow f(x_i)$   
 $\leftarrow f(x_{i+1})$   
 $\leftarrow f(x_{i+2})$   
 $\leftarrow f(x_{i+3})$   
 $\leftarrow f(x_{i+4})$   
 $\leftarrow f(x_{i+5})$

Figura 6.7.- Tabla 7



$$\Delta f = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

$$\Delta f = 1064 - 642 = 422$$

$$\Delta^2 f = f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)$$

$$\Delta^2 f = 1640 - 2(1064) + 642 = 154$$

$$\Delta^3 f = f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

$$\Delta^3 f = 2394 - 3(1640) + 3(1064) - 642 = 24$$

$$\Delta^4 f = f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)$$

$$\Delta^4 f = 3350 - 4(2394) + 6(1640) - 4(1064) + 642 = 0$$

$$\therefore f'(5) = \frac{1}{h} \left[ \Delta f - \frac{1}{2} \Delta^2 f + \frac{1}{3} \Delta^3 f - \frac{1}{4} \Delta^4 f + \dots \right] = \frac{1}{1} \left[ 422 - \frac{1}{2} (154) + \frac{1}{3} (24) \right]$$

$$f'(5) = 353$$

La primera derivada analítica es:

$$f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 3x + 2$$

$$f'(x) = 12x^2 + 10x + 3$$

$$f'(5) = 12(5)^2 + 10(5) + 3$$

$$f'(5) = 353$$

En este último ejercicio, se observa nuevamente que para obtener el mismo valor de la derivada numérica, con respecto al valor de la derivada analítica, se requiere usar  $\Delta f$ ,  $\Delta^2 f$  y  $\Delta^3 f$ . Esta delta cúbica de  $f$  ó tercera diferencia coincide con el hecho de que el grado del polinomio de la función  $f(x)$  es de grado 3. Además se observa que las deltas superiores a 3, o sea:  $\Delta^4 f$ ,  $\Delta^5 f$ , etc, todas son iguales a cero.

De los ejercicios realizados hasta este momento, podríamos construir la siguiente tabla:

Función	$f'(5)$ Numérica	$f'(5)$ Analítica	Deltas $f$ utilizadas
$3x+2$	3	3	$\Delta f$
$2x^2+x+4$	21	21	$\Delta f$ y $\Delta^2 f$
$4x^3+5x^2+3x+2$	353	353	$\Delta f$ , $\Delta^2 f$ y $\Delta^3 f$

Figura 6.8.- Tabla 8

De esta tabla podemos concluir lo siguiente:



- 1.- Para un polinomio de grado 1, la única delta usada es  $\Delta f$ .
- 2.- Para un polinomio de grado 2, las deltas usadas son  $\Delta f$  y  $\Delta^2 f$ .
- 3.- Para un polinomio de grado 3, las deltas usadas son  $\Delta f$ ,  $\Delta^2 f$  y  $\Delta^3 f$ .
- 4.- Para un polinomio de grado  $n$ , las deltas usadas para obtener el valor exacto de la derivada por las fórmulas de diferencia hacia adelante serán:  $\Delta f$ ,  $\Delta^2 f$ ,  $\Delta^3 f$ , ...,  $\Delta^n f$ . Además, las  $\Delta^{n+1} f$ ,  $\Delta^{n+2} f$ , ..., etc., serán todas iguales a cero.

Otra conclusión que no se deriva directamente de la tabla, pero que esta implícita, es la siguiente:

1.- Cuando se tenga una tabla de  $x$  contra  $f(x)$  solamente, es decir que no se conoce explícitamente la función  $f(x)$ , se podría saber el grado del polinomio que ajustará los datos, si se llegase a encontrar alguna delta de la función igual a cero. Por ejemplo si  $\Delta^5 f = 0$ , entonces el grado del polinomio que ajustaría sería grado 4. Si  $\Delta^4 f = 0$ , el grado del polinomio que ajustaría sería 3. Si  $\Delta^8 f = 0$ , el grado del polinomio que ajustaría sería 7. Desde luego que la delta igual a cero, debe ser la primera delta igual a cero.

Ahora obtengamos segundas derivadas:

Para poder calcular segundas derivadas diferentes a cero, se necesita partir de un polinomio, cuyo grado mínimo deberá ser 2.

Por tanto resolvamos el siguiente ejemplo. Por el método de diferencia hacia adelante calcular la segunda derivada de la función:

$$f(x) = 5x^2 + x + 1$$

Evaluar la segunda derivada en  $x=5$ .

Para emplear el método numérico genere una tabla de  $x$  contra  $f(x)$  variando  $x$  de 0 a 10 de uno en uno.

Solución:

$x$	$f(x)$
0	1
1	7
2	23
3	49
4	85
$x_i$ →	5 131 ← $f(x_i)$
$x_{i+1}$ →	6 187 ← $f(x_{i+1})$
$x_{i+2}$ →	7 253 ← $f(x_{i+2})$
$x_{i+3}$ →	8 329 ← $f(x_{i+3})$
	9 415
	10 511

Figura 6.9.- Tabla 9

Cálculo de la segunda derivada con 3 puntos:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

$$f''(5) = \frac{253 - 2(187) + 131}{(1)^2}$$

$$f''(5) = 10$$

Cálculo de la segunda derivada con 4 puntos:

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$$

$$f''(5) = \frac{-(329) + 4(253) - 5(187) + 2(131)}{(1)^2}$$

$$f''(5) = 10$$

Cálculo de la segunda derivada Analítica:

$$f(x) = 5x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 10x + 1$$

$$f''(x) = 10$$

Observamos que el resultado es lo mismo, usando la fórmula con 3 puntos ó 4 puntos; y además coincide con el valor de la derivada analítica.

Ejercicio:

Por el método de diferencias hacia adelante, calcular la segunda derivada de  $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$  para  $f''(5)$ . Utilice las fórmulas de 3 y 4 puntos y compare con el resultado analítico. Genere una tabla de  $x$  contra  $f(x)$  de 0 a 10 variando  $x$  de uno en uno.

$x$	$f(x)$		
0	1		
1	4		
2	15		
3	40		
4	85		
$x_i$ →	5	156	← $f(x_i)$
$x_{i+1}$ →	6	259	← $f(x_{i+1})$
$x_{i+2}$ →	7	400	← $f(x_{i+2})$
$x_{i+3}$ →	8	585	← $f(x_{i+3})$
	9	820	
	10	1111	

Figura 6.10.- Tabla 10

Cálculo de la segunda derivada con 3 puntos:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

$$f''(5) = \frac{400 - 2(259) + 156}{(1)^2}$$

$$f''(5) = 38$$

Cálculo de la segunda derivada con 4 puntos:



$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$$

$$f''(5) = \frac{-(585) + 4(400) - 5(259) + 2(156)}{(1)^2}$$

$$f''(5) = 32$$

Cálculo de la segunda derivada Analítica:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

$$f''(x) = 6x + 2$$

$$f''(5) = 32$$

Observamos con este resultado, que cuando se tenga una tabla generada con un polinomio de grado 3, se requiere usar la fórmula con 4 puntos, para obtener el mismo valor numérico que analítico.

Desde luego que en la derivación numérica, no se conoce el polinomio como en los ejemplos que hemos hecho, solo se conoce una tabla de x contra f(x), o se conoce la función la cual es difícil de evaluar analíticamente.

Sin embargo las conclusiones y comentarios que se han hecho aquí sirven para darse una idea de que ecuación usar o que  $\Delta f$  usar para calcular las derivadas. También puede servir para que se tenga una idea de que grado de polinomio podría usarse para ajustar los datos de x contra f(x).

[Regreso a la página principal.](#)



## 6.3 Fórmula de diferencias centrales

Considere la serie de Taylor:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots$$

Hagamos:

$$x = x_{i-1}$$

$$a = x_i$$

Sustituyamos estos valores en la serie de Taylor y consideremos solo hasta la primera derivada.

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i-1} - x_i)$$

$$x_{i-1} = x_i - h$$

$$x_{i-1} - x_i = -h$$

Sustituyendo esta última ecuación en la de  $f(x_{i-1})$ :

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + f'(x_i)(-h)$$

$$f(x_{i-1}) - f(x_i) = -f'(x_i)h$$

Sabemos que de las diferencias hacia adelante:

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(x_i)h$$

Restando las dos últimas ecuaciones:

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = f'(x_i)h - (-f'(x_i)h)$$

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)h$$

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)h$$

$$\therefore f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

Esta es la fórmula de diferencias centrales para dos puntos.

La fórmula de diferencias centrales con 4 puntos:

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{12h}$$

### Ejercicio:

Por el método de diferencias centrales, encontrar la primera derivada de  $f(x)$  para cuando  $x=3$  o sea  $f'(3)$  utilizando los datos de la siguiente tabla:

	x	f(x)	
	0	1	
$x_{i-1} \Rightarrow$	1.5	3	$\Leftarrow f(x_{i-1})$
$x_i \Rightarrow$	3	-1	$\Leftarrow f(x_i)$
$x_{i+1} \Rightarrow$	4.5	-6	$\Leftarrow f(x_{i+1})$
	6	1	

Figura 6.11.- Tabla 6.11

Cálculo de la primera derivada con la fórmula de diferencias centrales para 2 puntos.

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

$$h = 1.5 - 0 = 3 - 1.5 = 4.5 - 3 = 6 - 4.5 = 1.5$$

$$x_i = 3 \quad f(x_i = 3) = -1$$

$$x_{i+1} = 4.5 \quad f(x_{i+1} = 4.5) = -6$$

$$x_{i-1} = 1.5 \quad f(x_{i-1} = 1.5) = 3$$

$$\therefore f'(3) = \frac{-6 - 3}{2(1.5)} = \frac{-9}{3.0}$$

$$f'(3) = -3$$

Cálculo de la primera derivada con la fórmula de diferencias centrales con 4 puntos.

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{12h}$$

$$h = 1.5$$

$$x_i = 3$$

$$f(x_{i+1}) = -6$$

$$f(x_{i+2}) = 1$$

$$f(x_{i-1}) = 3$$

$$f(x_{i-2}) = 1$$

$$f'(3) = \frac{-(1) + 8(-6) - 8(3) + 1}{12(1.5)}$$

$$f'(3) = \frac{-1 - 48 - 24 + 1}{18} = \frac{-72}{18}$$

$$\underline{\underline{f'(3) = -4}}$$

A continuación se presentan las ecuaciones para encontrar la segunda derivada y la tercera derivada, utilizando fórmulas por diferencias centrales.

Para la segunda derivada con **3 puntos**:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

Para la segunda derivada con **5 puntos**:

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{12h^2}$$

Para la tercera derivada con **4 puntos**:

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{2h^3}$$

Para la tercera derivada con **6 puntos**:

$$f'''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3}))}{8h^3}$$

### Ejemplo:

Por el método de diferencias centrales. Dado  $f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ . Generar una tabla para  $x=1.1, 1.2, 1.3, 0.9, 0.8, 0.7$  y calcular  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  y  $f'''(x)$ .



x	f(x)
0.7	2.94117
0.8	3.68928
0.9	4.68559
1.0	6
1.1	7.71561
1.2	9.92992
1.3	12.75603

Figura 6.12.- Tabla 6.12

Solución:

Cálculo de la primera derivada con 2 puntos:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

$$f'(1) = \frac{7.71561 - 4.68559}{2(0.1)}$$

$$f'(1) = 15.15$$

Cálculo de la primera derivada con 4 puntos:

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{12h}$$

$$f'(1) = \frac{-9.92992 + 8(7.71561) - 8(4.68559) + 3.68928}{12(0.1)}$$

$$f'(1) = 14.9996$$

Cálculo de la primera derivada analítica:

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$f'(1) = 5(1)^4 + 4(1)^3 + 3(1)^2 + 2(1) + 1$$

$$f'(1) = 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

$$f'(1) = 15$$

Segunda derivada con tres puntos:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

$$h = 0.1$$

$$x_i = 1$$

$$f(x_i) = 6$$

$$f(x_{i+1}) = 7.71561$$

$$f(x_{i-1}) = 4.68559$$

$$f''(1) = \frac{7.71561 - 2(6) + 4.68559}{(0.1)^2} = \frac{0.4012}{0.01} = 40.12$$

$$\underline{\underline{f''(1) = 40.12}}$$

Segunda derivada con 5 puntos:

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{12h^2}$$

$$h=0.1$$

$$f(x_i)=6$$

$$f(x_{i+1})=7.71561$$

$$f(x_{i+2})=9.92992$$

$$f(x_{i-1})=4.68559$$

$$f(x_{i-2})=3.68928$$

$$x_i = 1$$

Sustituyendo valores:

$$f''(x_i) = \frac{-(9.92992) + 16(7.71561) - 30(6) + 16(4.68559) - 3.68928}{12(0.1)^2}$$

$$\underline{\underline{f''(1) = \frac{4.8}{12(0.01)} = 40}}$$

Segunda derivada analítica:

$$f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$f'(x)=5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$$

$$f''(x)=20x^3+12x^2+6x+2$$

$$f''(x)=20(1)^3+12(1)^2+6(1)+2$$

$$f''(1)=40$$

Cálculo de la tercera derivada con 4 puntos:

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{2h^3}$$

$$h=0.1$$

$$f(x_{i+1})=7.71561$$

$$f(x_{i+2})=9.92992$$

$$f(x_{i-1})=4.68559$$

$$f(x_{i-2})=3.68928$$

$$x_i = 1.0$$

Sustituyendo valores:

$$f'''(1) = \frac{9.92992 - 2(7.71561) + 2(4.68559) - 3.68928}{2(0.1)^3}$$

$$\underline{\underline{f'''(1) = 90.3}}$$

Tercera derivada con 6 puntos:

$$f'''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})}{8h^3}$$

$$f(x_{i+3}) = 12.75603$$

$$f(x_{i-3}) = 2.94117$$

$$f'''(1) = \frac{-12.75603 + 8(9.92992) - 13(7.71561) + 13(4.68559) - 8(3.68928)}{8(0.1)^3}$$

$$\underline{\underline{f'''(1) = 90}}$$

La tercera derivada analítica es:

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$f''(x) = 20x^3 + 12x^2 + 6x + 2$$

$$f'''(x) = 60x^2 + 24x + 6$$

$$f'''(x) = 60(1)^2 + 24(1) + 6$$

$$f'''(1) = 90$$

## Resumen

$$\mathbf{f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}$$

Cálculo de derivadas evaluadas en  $x=1$ .

	2 Puntos	3 Puntos	4 Puntos	5 Puntos	6 Puntos	Analítica
Primera Derivada	15.15		14.99			15
Segunda Derivada		40.12		40		40
Tercera Derivada			90.3		90	90

Figura 6.13.- Tabla 13

**Ejercicio:**



Considere la siguiente función de  $x$ .

$$f(x)=3x^3+2x^2+x+4$$

genere una tabla de  $x$  y  $f(x)$  variando  $x$  de 0 a 1 en intervalos de 0.1. Y finalmente calcule  $f'(0.5)$ ,  $f''(0.5)$  y  $f'''(0.5)$  y compare sus resultados con la solución analítica.

Solución:

	$x$	$f(x)$	
	0	4	
$x_{i-4}$ →	1	4.123	← $f(x_{i-4})$
$x_{i-3}$ →	2	4.304	← $f(x_{i-3})$
$x_{i-2}$ →	3	4.561	← $f(x_{i-2})$
$x_{i-1}$ →	4	4.912	← $f(x_{i-1})$
$x_i$ →	5	5.375	← $f(x_i)$
$x_{i+1}$ →	6	5.968	← $f(x_{i+1})$
$x_{i+2}$ →	7	6.709	← $f(x_{i+2})$
$x_{i+3}$ →	8	7.616	← $f(x_{i+3})$
$x_{i+4}$ →	9	8.707	← $f(x_{i+4})$
	10	10.000	

Figura 6.14.- Tabla 14

Cálculo de la primera derivada con la fórmula de diferencias centrales para 2 puntos:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

$$f'(0.5) = \frac{5.968 - 4.912}{2(0.1)}$$

$$f'(1) = 5.28$$

Cálculo de la primera derivada con la fórmula de diferencias centrales con 4 puntos:

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{12h}$$

$$f'(1) = \frac{-6.709 + 8(5.968) - 8(4.912) + 4.561}{12(0.1)}$$

$$f'(1) = 5.25$$

Cálculo de la primera derivada analítica:

$$f(x)=3x^3+2x^2+x+4$$

$$f'(x)=3(3)x^2+2(2)x+1$$

$$f'(x)=9x^2+4x+1$$

$$f'(0.5)=9(0.5)^2+4(0.5)+1$$

$$f'(0.5)=5.25$$

La fórmula de diferencias centrales con 4 puntos da el resultado exacto cuando los datos de la tabla son generales por un polinomio de tercer grado.

Cálculo de la segunda derivada con la fórmula de diferencias centrales para 3 puntos:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

$$f''(0.5) = \frac{5.968 - 2(5.375) + 4.912}{(0.1)^2}$$

$$f''(0.5) = 13$$

Cálculo de la segunda derivada con la fórmula de diferencias centrales para 5 puntos:

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{12h^2}$$

$$f''(0.5) = \frac{-6.709 + 16(5.968) - 30(5.375) + 16(4.912) - 4.561}{12(0.1)^2}$$

$$f''(0.5) = 13$$

Cálculo de la segunda derivada analítica:

$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 4$$

$$f'(x) = 3(3)x^2 + 2(2)x + 1$$

$$f'(x) = 9x^2 + 4x + 1$$

$$f''(x) = 9(2)x + 4$$

$$f''(x) = 18x + 4$$

$$f''(0.5) = 18(0.5) + 4$$

Las fórmulas de diferencia centrales con 3 puntos y con 5 puntos dan el resultado exacto cuando los datos de la tabla son generados por un polinomio de tercer grado.

Cálculo de la tercera derivada con la fórmula de diferencias centrales para 4 puntos:

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{2h^3}$$

$$f'''(0.5) = \frac{6.709 - 2(5.968) + 2(4.912) - 4.561}{2(0.1)^3}$$

$$f'''(0.5) = 18$$

Cálculo de la tercera derivada con la fórmula de diferencias centrales para 6 puntos:

$$f'''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3}))}{8h^3}$$

$$f'''(0.5) = \frac{-(7.616) + 8(6.709) - 13(5.968) + 13(4.912) - 8(4.561) + 4.304}{8(0.1)^3}$$

$$f'''(0.5) = 18$$

Cálculo de la tercera derivada analítica:

$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 4$$

$$f'(x) = 3(3)x^2 + 2(2)x + 1$$

$$f'(x) = 9x^2 + 4x + 1$$

$$f''(x) = 9(2)x + 4$$

$$f''(x) = 18x + 4$$

$$f'''(x) = 18$$



$$f'''(0.5)=18$$

La fórmula de diferencias centrales con 4 puntos y con 6 puntos dan el resultado exacto cuando los datos de la tabla son generados por un polinomio de tercer grado.

## Resumen

$$f(x)=3x^3+2x^2+x+4$$

Cálculo de derivadas evaluadas en  $x=0.5$ .

	2 Puntos	3 Puntos	4 Puntos	5 Puntos	6 Puntos	Analítica
Primera Derivada	5.28		5.25			5.25
Segunda Derivada		13		13		13
Tercera Derivada			18		18	18

Figura 6.15.- Tabla 15

## Ejemplo:

Considere la siguiente función de  $x$ :

$$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$$

genere una tabla de  $x \forall f(x)$  variando  $x$  de 0 a 10 en intervalos de 1,0. Finalmente calcule  $f'(5)$ ,  $f''(5)$  y  $f'''(5)$ , y compare sus resultados con la solución analítica.

Solución:

	$x$	$f(x)$	
$x_{i+5}$ ➡	0	1.0	⬅ $f(x_{i-5})$
$x_{i+4}$ ➡	1	5.0	⬅ $f(x_{i-4})$
$x_{i+3}$ ➡	2	31.0	⬅ $f(x_{i-3})$
$x_{i+2}$ ➡	3	121.0	⬅ $f(x_{i-2})$
$x_{i+1}$ ➡	4	341.0	⬅ $f(x_{i-1})$
$x_i$ ➡	5	781.0	⬅ $f(x_i)$
$x_{i+1}$ ➡	6	1555.0	⬅ $f(x_{i+1})$
$x_{i+2}$ ➡	7	2801.0	⬅ $f(x_{i+2})$
$x_{i+3}$ ➡	8	4681.0	⬅ $f(x_{i+3})$
$x_{i+4}$ ➡	9	7381.0	⬅ $f(x_{i+4})$
$x_{i+5}$ ➡	10	11111.0	⬅ $f(x_{i+5})$



Figura 6.16.- Tabla 16

Cálculo de la primera derivada con la fórmula de diferencias centrales para 2 puntos:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

$$f'(5) = \frac{1555 - 341}{2(1)}$$

$$f'(5) = 607$$

Cálculo de la primera derivada con la fórmula de diferencias centrales con 4 puntos:

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{12h}$$

$$f'(5) = \frac{-2801 + 8(1555) - 8(341) + 121}{12(1)}$$

$$f'(5) = 586$$

Cálculo de la primera derivada analítica:

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$f'(5) = 4(5)^3 + 3(5)^2 + 2(5) + 1$$

$$f'(5) = 586$$

La fórmula de diferencias centrales con 4 puntos da el resultado exacto cuando los datos de la tabla son generales por un polinomio de cuarto grado.

Cálculo de la segunda derivada con la fórmula de diferencias centrales para 3 puntos:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

$$f''(5) = \frac{1555 - 2(781) + 341}{(1)^2}$$

$$f''(5) = 334$$

Cálculo de la segunda derivada con la fórmula de diferencias centrales para 5 puntos:

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{12h^2}$$

$$f''(0.5) = \frac{-2801 + 16(1555) - 30(781) + 16(341) - 121}{12(1)^2}$$

$$f''(0.5) = 332$$

Cálculo de la segunda derivada analítica:

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6x + 2$$

$$f''(5) = 12(5)^2 + 6(5) + 2$$

$$f''(5) = 332$$

Las fórmulas de diferencia central con 5 puntos dan el resultado exacto cuando los datos de la tabla son generados por un polinomio de cuarto grado.

Cálculo de la tercera derivada con la fórmula de diferencias centrales para 4 puntos:

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{2h^3}$$

$$f'''(5) = \frac{2801 - 2(1555) + 2(341) - 121}{2(1)^3}$$

$$f'''(5) = 126$$

Cálculo de la tercera derivada con la fórmula de diferencias centrales para 6 puntos:

$$f'''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3}))}{8h^3}$$

$$f'''(5) = \frac{-(4681) + 8(2801) - 13(1555) + 13(341) - 8(121) + 31}{8(1)^3}$$

$$f'''(5) = 126$$

Cálculo de la tercera derivada analítica:

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$f''(x) = 4(3)x^2 + 3(2)x + 2(1)$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6x + 2$$

$$f'''(x) = 12(2)x + 6(1)$$

$$f'''(5) = 24(5) + 6$$

$$f'''(5) = 126$$

La fórmula de diferencias centrales con 4 puntos y con 6 puntos dan el resultado exacto cuando los datos de la tabla son generados por un polinomio de cuarto grado.

## Resumen

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Cálculo de las derivadas evaluadas en  $x=5$ .

	2 Puntos	3 Puntos	4 Puntos	5 Puntos	6 Puntos	Analítica
Primera Derivada	607		586			586
Segunda Derivada		334		332		332
Tercera Derivada			126		126	126



---

### Figura 6.17.- Tabla 17

Observando el resumen del ejemplo anterior y el de este último ejemplo se puede concluir lo siguiente para las fórmulas de diferencias centrales:

**Para un polinomio de grado  $n$  se requiere usar la fórmula de diferencias centrales para  $n$  puntos o para más puntos con el fin de obtener el mismo resultado que el de la derivada analítica.**

[Regreso a la página principal.](#)



## 6.4 Errores en diferenciación numérica

El error al encontrar la primera derivada por la fórmula de diferencia hacia adelante

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} = \frac{\Delta f}{h}$$

Es igual a:

$$-\frac{h}{2}f''(\xi)$$

Desde luego que para poder evaluar el error, necesitamos conocer  $\xi$  y  $f'(\xi)$

$\xi$  es un valor entre  $x_i$  y  $x_{i+1}$  con  $x_i < \xi < x_{i+1}$ .

Usualmente no se conoce este valor; lo que se puede hacer es evaluar el error que resulta cuando  $\xi = x_i$  y cuando  $\xi = x_{i+1}$ , de manera tal que con estos dos valores extremos se tenga una idea de los límites extremos del error.

Por otro lado si la función a la cual le deseamos evaluar su primera derivada,  $f'(x)$ , no tiene segunda derivada, automáticamente su error será cero, independientemente del valor que pudiese tener  $\xi$ .

Por ejemplo:

$$f(x) = 5x + 9$$

$$f'(x) = 5$$

$$f''(x) = 0$$

$\therefore$  Al evaluar numéricamente la primera derivada  $f'(x)$  con  $f'(x_i) = \frac{\Delta f}{h}$ , el error será cero. Hagamos el ejercicio, construyendo primero una tabla de  $x$  y  $f(x)$ . Tomemos  $x$  de cero a 5.

$x$	$f(x)$
0	9
1	14
2	19
$x_i$ $\rightarrow$ 3	24
$x_{i+1}$ $\rightarrow$ 4	29
5	34

Figura 6.17.- Tabla 17

Ahora calculemos  $f'(x)$  para  $x_i = 3$ , es decir  $f'(3)$

$$f'(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} = \frac{29 - 24}{1} = 5$$

$$\therefore f'(3) = 5$$

El mismo resultado se obtiene numéricamente y analíticamente, ya que el error es cero. Desde luego que cuando tenemos una tabla de  $x \nabla f(x)$ , no conocemos la función de  $x$  explícitamente, y por lo tanto no podríamos saber si la segunda derivada es igual a cero.

Lo que se puede hacer en los casos de conocer únicamente la tabla de  $x \nabla f(x)$ , es hacer un ajuste de los datos a un polinomio y determinar que polinomio y de qué grado es el que ajusta mejor a los datos tabulados.

Ya conocido el polinomio, se puede tener una idea de si la segunda derivada va a ser igual a cero o no, y desde luego si el error va a ser igual a cero o no, independientemente del valor de  $\xi$ .

El error que acabamos de describir es cuando calculamos  $f'(x_i)$  con  $\Delta f$  solamente, pero recordando

$$f'(x_i) = \frac{1}{h} \left[ \Delta f - \frac{1}{2} \Delta^2 f + \frac{1}{3} \Delta^3 f - \frac{1}{4} \Delta^4 f + \frac{1}{5} \Delta^5 f \dots \right]$$

que  $f'(x_i)$  lo podemos calcular con:

el cálculo de error será diferente, según el número de diferencias que empleamos.

En general la ecuación para calcular el error al calcular la primera derivada por las fórmulas de diferencia hacia adelante es:

$$\text{Error} = \frac{(-1)^n h^n f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}$$

donde  $n$  es el número de diferencias que se utilizan.

Por ejemplo si se utiliza  $\Delta f$ :

$$\text{Error} = \frac{(-1)^1 h^1 f^2(\xi)}{2} = -\frac{h}{2} f''(\xi)$$

Si se utiliza  $\Delta^2 f$

$$\text{Error} = \frac{(-1)^2 h^2 f^3(\xi)}{3} = \frac{h^2}{3} f'''(\xi)$$

Si se utiliza  $\Delta^3 f$

$$\text{Error} = \frac{(-1)^3 h^3 f^4(\xi)}{4} = -\frac{h^3}{4} f^{IV}(\xi)$$

Y así sucesivamente.

Desde luego que en todas las ecuaciones anteriores la derivada no existe para el ejemplo propuesto, entonces el error será cero independientemente de cual sea el valor de  $\xi$ .

El error al encontrar la primera derivada por la fórmula de diferencias centradas

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

$$\text{Es igual a: } -\frac{h^2}{6} f'''(\xi) \quad x_{i-1} < \xi < x_{i+1}$$

Los mismos comentarios que se hicieron para la ecuación del error de las fórmulas de diferencias hacia adelante, aplican a la ecuación del error de las fórmulas de diferencias centradas.



Ejemplo:

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 4$$

$$f'(x) = 4x + 3$$

$$f''(x) = 4$$

$$f'''(x) = 0$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

Al evaluar numéricamente la primera derivada  $f'(x_i)$  con el error debe de ser cero, ya que  $f'''(x)=0$

Hagamos el ejercicio, construyendo primero una tabla de  $x \forall f(x)$ . Tomamos  $x$  de cero a 5.

x	f(x)
0	4
1	9
2	18
3	31
4	48
5	69

Figura 6.18.- Tabla 18

Ahora calculamos  $f'(x_i)$  para  $x_i = 3$ , es decir  $f'(3)$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} = \frac{48 - 18}{2(1)} = \frac{30}{2} = 15 = \therefore f'(3) = 15$$

El mismo resultado se obtiene numéricamente y analíticamente, ya que el error es cero.

La ecuación del error al calcular la primera derivada con la fórmula de 4 puntos por diferencias centradas es:

$$\frac{h^4}{30} f^{(4)}(\xi)$$

Esta ecuación aplica para cuando se usa:

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{12h} \quad \text{fórmula de 4 puntos.}$$

Cuando se calcula la segunda derivada con la fórmula de tres puntos por diferencias centrados.

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

$$\text{la ecuación del error es: } -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi) \quad x_{i-1} < \xi < x_{i+1}$$

Al calcular las derivadas numéricamente se pueden cometer dos tipos de errores. Una parte debida al error de redondeo y otra al error de truncamiento. Si queremos reducir el error de truncamiento debemos de reducir  $h$ . Pero al reducir  $h$ , el error de redondear crece. Así pues en la práctica rara vez conviene que  $h$  sea muy pequeño, porque el error de redondear predominará en los cálculos.



Por ejemplo en el cálculo de la primera derivada por la fórmula de 2 puntos de diferencias

centradas, el error de redondeo se calcula como  $\frac{\xi}{h}$  y el error de redondeo de truncamiento como  $\frac{h^2}{6} f'''(\xi)$

En estas fórmulas se ve claramente que conforme  $h$  disminuye, el error de truncamiento se hace más pequeño, pero el error de redondeo se hace más grande.

[Regreso a la página principal.](#)

## 7 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN.

---

### 7.1 Ecuaciones Diferenciales y en diferencia

Las ecuaciones diferenciales sirven para modelar problemas que requieren el cambio de un variable respecto a la otra. En la mayor parte de estos problemas hay que resolver un problema de valor inicial, es decir, resolver una ecuación diferencial que satisface una condición inicial dada.

En la generalidad de las situaciones de la vida real, la ecuación diferencial que modela el problema resulta demasiado complicado para resolverla con exactitud, por lo que se recurre a los procedimientos para aproximar la solución. El primero consiste en simplificar la ecuación diferencial de modo que podamos resolverla exactamente y utilizar después la solución de la ecuación simplificada para aproximar la solución de la ecuación original. El segundo, se valer de métodos numéricos para aproximar la solución del problema original. Este último procedimiento es el que se emplea por lo regular, pues los métodos de aproximación dan resultados más exactos.

El método numérico que aquí veremos no produce una aproximación continua a la solución del problema de valor inicial. Por el contrario, se obtienen las aproximaciones en algunos puntos específicos y, a menudo, igualmente espaciados. Si se requieren valores intermedios, se utiliza un método de interpolación.

El método de Euler es un método numérico que emplea una ecuación que se llama: Ecuación de Diferencia. El método de Euler se emplea para aproximar la solución de una ecuación diferencial.

[Regreso a la página principal.](#)



## 7.2 Método de Euler

El método de Euler tiene por objeto obtener una aproximación de un problema bien planteado de valor inicial. Es decir, se trata de obtener una aproximación de:

función de  $t$  y de  $y$

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad a \leq t \leq b \quad y(a) = \alpha$$

derivada de  $y$  con respecto de  $t$

En la práctica, no se obtendrá una aproximación continua a la solución  $y(t)$ ; por el contrario, se generarán aproximaciones a esa solución en varios valores, llamados: PUNTOS DE RED., en el intervalo  $[a, b]$ . Una vez obtenida la aproximación en los puntos, podemos obtener por interpolación la solución aproximada en otros puntos del intervalo.

En primer lugar, estipulamos que los puntos de red tienen una distribución uniforme en todo el intervalo  $[a, b]$ .

Garantizamos esta condición al seleccionar un entero positivo  $N$  y los puntos de red:  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$ , donde:

$$t_i = a + ih \text{ para cada } i=0, 1, 2, 3, \dots, N$$

donde

$$h = \frac{b - a}{N}$$

$h$  = Tamaño de paso

Se utiliza el Teorema de Taylor para derivar el método de Euler.

Se supone que  $y(t)$ , la solución única de la ecuación diferencial, tiene primera derivada y segunda derivada en el intervalo  $[a, b]$ , de modo que para cada  $i=0, 1, 2, 3, \dots, N-1$ .

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2} y''(\xi_i)$$

donde :

$$t_i < \xi_i < t_{i+1}$$

$$\text{y sí } h = t_{i+1} - t_i$$

Entonces:



$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

Sustituyendo:

$y'(t_i)$  por

$$y'(t_i) = \frac{dy}{dt} = f(t_i, y(t_i))$$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

El método de Euler sustituye  $w_{i+1}$  por  $y(t_{i+1})$  para cada  $i=1,2,3,\dots,N$ , elimina el término con segunda derivada y considera  $w_0 = y_0$ .

Por lo tanto, la ecuación anterior queda como:

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) \text{ para cada } i=0,1,2,\dots,N-1$$

A esta última ecuación se le llama Ecuación de Diferencia. Esta última ecuación es la ecuación del método de Euler.

Ejemplo:

Utilice el método de Euler para aproximar la solución al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y' = y - t^2 + 1$$

para  $0 \leq t \leq 2$  y  $y(0)=0.5$  con  $N=10$

Solución:

$$h = \frac{b-a}{N}$$

$$a=0$$

$$b=2$$

$$N=10$$

$$h = \frac{2-0}{10}$$

$$h=0.2$$

$$t_i = a + ih$$

$$t_i = 0 + i(0.2)$$

$$t_i = 0.2i$$

$$w_0 = y_0 = 0.5$$

$$w_0 = 0.5$$

Con la ecuación del método de Euler:

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$$

$$w_{i+1} = w_i + h(w_i - t_i^2 + 1) \text{ y } t = t_i$$

$$w_{i+1} = w_i + 0.2(w_i - (0.2i)^2 + 1)$$

$$w_{i+1} = w_i + 0.2(w_i - (0.02i^2 + 1))$$

$$w_{i+1} = 1.2 w_i - 0.008 i^2 + 0.2 \text{ para } i=0,1,2,\dots,9$$

i	$t_i=0.2i$	$w_i$
0	0	0.5
1	0.2	0.8
2	0.4	1.152
3	0.6	1.5504
4	0.8	1.98848
5	1.0	2.458176
6	1.2	2.9498112
7	1.4	3.45177344
8	1.6	3.950128128
9	1.8	4.4281537536
10	2.0	4.8657845043

Ejercicio:

Aplice el método de Euler para aproximar la solución del siguiente problema de valor inicial.

$$y' = te^{3t} - 2y \quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(0) = 0 \quad h = 0.5$$

Solución:

$$a = 0$$

$$b = 1$$

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{1-0}{N} = \frac{1}{N} = 0.5$$

$$\therefore N = \frac{1}{0.5}$$

$$N = 2$$

$$t_i = a + ih$$

$$t_i = 0 + i(0.5)$$

$$t_i = 0.5i$$

$$w_0 = 0$$

$$w_0 = 0$$

Con la ecuación del método de Euler:

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$$

$$w_{i+1} = w_i + h(t_i e^{3t_i} - 2w_i) \quad \text{donde } y = w_i \text{ y } t = t_i$$

$$w_{i+1} = w_i + h(0.5i e^{3(0.5)i} - 2w_i)$$

$$w_{i+1} = w_i + 0.5(0.5i e^{1.5i} - 2w_i)$$

$$w_{i+1} = w_i + 0.25i e^{1.5i} - w_i$$

$$w_{i+1} = 0.25i e^{1.5i} \text{ para } i=0,1,2$$

Para  $i=0$

$$w_1 = 0.25(0) e^{1.5(0)}$$

$$w_1 = 0.25(0) (1)$$

$$w_1 = 0$$

Para  $i=1$

$$w_2 = 0.25(1) e^{1.5(1)}$$

$$w_2 = 0.25(1) (4.48168907034)$$

$$w_2 = 1.12042226758$$

Resumamos los resultados en la siguiente tabla:

$i$	$t_i=0.2i$	$w_i$
0	0	0
1	0.5	0
2	1.0	1.1204222675

A continuación se da la solución real al problema del valor inicial de este ejercicio:

$$y(t) = \frac{1}{5} t e^{3t} - \frac{1}{25} e^{3t} + \frac{1}{25} e^{-2t}$$

Compare la solución real, con la solución por el método de Euler.

Para  $i=0$

$$y(t_0) = \frac{1}{5} t_0 e^{3t_0} - \frac{1}{25} e^{3t_0} + \frac{1}{25} e^{-2t_0}$$

$$t_0 = 0$$

$$y(t_0 = 0) = \frac{1}{5}(0) e^{3(0)} - \frac{1}{25} e^{3(0)} + \frac{1}{25} e^{-2(0)}$$

$$y(t_0 = 0) = 0 - \frac{1}{25} + \frac{1}{25} = 0$$

$$\underline{\underline{y(t_0 = 0) = 0}}$$

para  $i=1$



$$y(t_1) = \frac{1}{5} t_1 e^{3t_1} - \frac{1}{25} e^{3t_1} + \frac{1}{25} e^{-2t_1}$$

$$t_1 = 0.5$$

$$y(t_1 = 0.5) = \frac{1}{5} (0.5) e^{3(0.5)} - \frac{1}{25} e^{3(0.5)} + \frac{1}{25} e^{-2(0.5)}$$

$$y(t_1 = 0.5) = 0.448168907034 - 0.179267562814 + 1.47151776468 * 10^{-2}$$

$$\underline{\underline{y(t_1 = 0.5) = 0.283616521867}}$$

para i=2

$$y(t_2) = \frac{1}{5} t_2 e^{3t_2} - \frac{1}{25} e^{3t_2} + \frac{1}{25} e^{-2t_2}$$

$$t_2 = 1$$

$$y(t_2 = 1) = \frac{1}{5} (1) e^{3(1)} - \frac{1}{25} e^{3(1)} + \frac{1}{25} e^{-2(1)}$$

$$\underline{\underline{y(t_2 = 1) = 3.21909931904}}$$

i	t <sub>i</sub>	w <sub>i</sub>	y(t <sub>i</sub> )	y <sub>i</sub> - w <sub>i</sub>
1	0.5	0	0.28361652186	0.28361652186
2	1.0	1.12042226758	3.21909931904	2.09867705146

Aplique el método de Euler para aproximar la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = 1 + (t - y)^2 \quad 2 \leq t \leq 3 \quad y(2) = 1 \quad \text{con } h = 0.5$$

Primero colocamos  $t_i = a + ih$

$$a = 2$$

$$b = 3$$

$$h = 0.5$$

$$t_i = 2 + (0.5)i$$

$$t_i = 2 + 0.5I$$

$$h = \frac{b - a}{N} \therefore \frac{N}{b - a} = \frac{1}{h}$$

$$N = \frac{b - a}{h} = \frac{3 - 2}{0.5} = \frac{1}{0.5} = 2$$

$$w_0 = \infty$$

$$y(2) = 1$$

$$y(2) = \infty$$

$$\therefore \infty = 1 \therefore w_0 = \infty$$

$w_0 = 1$  Este es el valor inicial

Sabemos que la ecuación del método de Euler es:

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$$

$$w_{i+1} = w_i + 0.5[1 + (t_i - w_i)^2]$$

$$w_{i+1} = w_i + 0.5[1 + t_i^2 - 2 t_i w_i + w_i^2]$$

$$w_{i+1} = w_i + 0.5 + 0.5 t_i^2 - 2(0.5) t_i w_i + 0.5 w_i^2$$

$$w_{i+1} = w_i + 0.5 + 0.5(2 + 0.5i)^2 - (2 + 0.5i) w_i + 0.5 w_i^2$$

$$w_{i+1} = w_i + 0.5 + 0.5(4 + 2(2)(0.5)i + 0.25 i^2) - 2 w_i - 0.5i w_i + 0.5 w_i^2$$

$$w_{i+1} = w_i + 0.5 + 0.5(4 + 2i + 0.25i^2) - 2 w_i - 0.5 w_i + 0.5 w_i^2$$

$$w_{i+1} = w_i + 0.5 + 2 + i + 0.125 i^2 - 2 w_i - 0.5i w_i + 0.5 w_i^2$$

$$w_{i+1} = 0.5w_i^2 - w_i - 0.5i w_i + i + 0.125 i^2 + 2.5 \text{ para } i=0,1$$

para  $i=0$

$$w_1 = 0.5w_0^2 - w_0 - 0.5(0)w_0 + 0 + 0.125 (0)^2 + 2.5$$

$$w_1 = 0.5w_0^2 - w_0 - 0 + 0 + 0 + 2.5$$

$$w_1 = 0.5(1)^2 - (1) + 2.5$$

$$w_1 = 2$$

para  $i=1$

$$w_2 = 0.5w_1^2 - w_1 - 0.5(1)w_1 + 1 + 0.125 (1)^2 + 2.5$$

$$w_2 = 0.5(2)^2 - (2) - 0.5(1)(2) + 1 + 0.125 (1)^2 + 2.5$$

$$w_2 = 0.5(4) - (2) - 1 + 1 + 0.125 + 2.5$$

$$w_2 = 2.625$$

Resumen:

$i$	$t_i = 2 + 0.5i$	$w_i$
0	2	0
1	2.5	2
2	3.0	2.625

A continuación se da la solución real al problema del valor inicial de este ejercicio:

$$y(t) = t + \frac{1}{1-t} \Rightarrow y(t_i) = t_i + \frac{1}{1-t_i}$$

Compare la solución real con la solución por el método de Euler:

Para  $i=0$   $t_0=2$

$$y(t_0 = 2) = t_0 + \frac{1}{1-t_0} = 2 + \frac{1}{1-2}$$

$$\underline{\underline{y(t_0 = 2) = 1}}$$

Para  $i=1$   $t_1=2.5$

$$y(t_1 = 2.5) = t_1 + \frac{1}{1-t_1} = 2.5 + \frac{1}{1-2.5}$$

$$\underline{\underline{y(t_1 = 2.5) = 1.833}}$$

Para  $i=2$   $t_2=3.0$

$$y(t_2 = 3) = t_2 + \frac{1}{1-t_2} = 3 + \frac{1}{1-3}$$

$$\underline{\underline{y(t_2 = 3) = 2.5}}$$

Comparación

$i$	$t_i=2+0.5i$	$w_i$	$y(t_i)$	$ y(t_i) - w_i $
0	2	0	1	1
1	2.5	2	1.833	0.167
2	3.0	2.625	2.5	0.125

Aplice el método de Euler para aproximar la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = 1 + \frac{y}{t} \quad 1 \leq t \leq 2 \quad y(1)=2 \quad h=0.25$$

Primero calculamos  $t_i = a + ih$

$$a=1$$

$$b=2$$

$$h=0.25$$

$$t_i = 2 + (0.5)i$$

$$\underline{\underline{t_i = 1 + 0.25i}}$$

$$N = \frac{b-a}{h} = \frac{2-1}{0.25} = 4$$

$$w_0 = \infty$$

$$y(1)=2$$

$$y(1) = \infty$$

$$\therefore \infty = 2 \therefore w_0 = \infty \therefore w_0 = 2$$

$w_0 = 2$  Este es el valor inicial

La ecuación del método de Euler es:

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$$



$$w_{i+1} = w_i + 0.25 \left[ 1 + \frac{w_i}{t_i} \right] = w_i + 0.25 \left[ 1 + \frac{w_i}{1 + 0.25i} \right]$$

$$w_{i+1} = w_i + 0.25 \left[ 1 + \frac{w_i}{1 + 0.25i} \right]$$

para  $i=0,1,2,3$

Para  $i=0$

$$w_1 = w_0 + 0.25 \left[ 1 + \frac{w_0}{1 + 0.25(0)} \right] = 2 + 0.25 \left[ 1 + \frac{2}{1} \right]$$

$$w_1 = 2.75$$

Para  $i=1$

$$w_2 = w_1 + 0.25 \left[ 1 + \frac{w_1}{1 + 0.25(1)} \right] = 2.75 + 0.25 \left[ 1 + \frac{2.75}{1.25} \right]$$

$$\underline{\underline{w_2 = 3.55}}$$

Para  $i=2$

$$w_3 = w_2 + 0.25 \left[ 1 + \frac{w_2}{1 + 0.25(2)} \right] = 3.55 + 0.25 \left[ 1 + \frac{3.55}{1.5} \right]$$

$$\underline{\underline{w_3 = 4.3916667}}$$

Para  $i=3$

$$w_4 = w_3 + 0.25 \left[ 1 + \frac{w_3}{1 + 0.25(3)} \right] = 4.3916667 + 0.25 \left[ 1 + \frac{4.3916667}{1.75} \right]$$

$$\underline{\underline{w_4 = 5.2690476}}$$

Resumen:

$i$	$t_i=0+0.25i$	$w_i$
0	1	2
1	1.25	2.75
2	1.50	3.55
3	1.75	4.3916667
4	2	5.2690476

A continuación se da la solución real al problema del valor inicial de este ejercicio:

$$y(t)=t \ln t + 2t$$

Compare la solución real con la solución por el método de Euler:

Para  $i=0$   $t_0=1$

$$y(t_0) = t_0 \ln t_0 + 2 t_0 = 1 \ln(1) + 2(1)$$

$$y(t_0) = 2$$

Para  $i=1$   $t_0=1.25$

$$y(t_1=1.25) = t_1 \ln t_1 + 2 t_1 = (1.25) \ln(1.25) + 2(1.25)$$

$$y(t_1=1.25) = 2.7789294$$

Para  $i=2$   $t_0=1.5$

$$y(t_2=1.5) = t_2 \ln t_2 + 2 t_2 = (1.5) \ln(1.5) + 2(1.5)$$

$$y(t_2=1.5) = 3.6081977$$

Para  $i=3$   $t_0=1.75$

$$y(t_3=1.75) = t_3 \ln t_3 + 2 t_3 = (1.75) \ln(1.75) + 2(1.75)$$

$$y(t_3=1.75) = 4.4793276$$

Para  $i=4$   $t_0=2$

$$y(t_4=2) = t_2 \ln t_2 + 2 t_2 = (2) \ln(2) + 2(2)$$

$$y(t_4=2) = 5.3862944$$

Comparación:

$i$	$t_i=1+0.25i$	$w_i$	$y(t_i)$	$ y(t_i) - w_i $
1	1.25	2.75	2.7789294	0.0289294
2	1.50	3.55	3.6081977	0.0581977
3	1.75	4.3916667	4.4793276	0.0876609
4	2.00	5.2690476	5.3862944	0.1172468

Aplique el método de Euler para aproximar la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = \cos 2t + \sin 3t \quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(0)=1 \quad h=0.25$$

$t$ =radianes

Primero calculamos  $t_i = a + ih$

$$a=0$$

$$b=1$$

$$h=0.25$$

$$t_i = 2 + (0.25)i$$

$$t_i = 1 + 0.25i$$

$$N = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0.25} = 4$$

$$w_0 = \infty$$

$$y(0)=1$$

$$y(0)=\infty$$

$$\therefore \infty = 1 \therefore w_0 = \infty \therefore w_0 = 1$$

$w_0 = 1$  Este es el valor inicial

La ecuación del método de Euler es:

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$$

$$w_{i+1} = w_i + 0.25[\cos 2 t_i + \operatorname{sen} 3 t_i]$$

$$w_{i+1} = w_i + 0.25[\cos(0.25i) + \operatorname{sen}(0.25i)]$$

$$w_{i+1} = w_i + 0.25[\cos(0.5i) + \operatorname{sen}(0.75i)] \text{ para } i=0,1,2,3$$

Para  $i=0$

$$w_1 = w_0 + 0.25[\cos(0.5(0)) + \operatorname{sen}(0.75(0))]$$

$$w_1 = 1 + 0.25(1+0) = 1.25$$

Para  $i=1$

$$w_2 = w_1 + 0.25[\cos(0.5*1) + \operatorname{sen}(0.75*1)]$$

$$w_2 = 1.25 + 0.25[0.8775825 + 0.6816387] = 1.6398053$$

**Nota:** La calculadora debe de estar en radianes

Para  $i=2$

$$w_3 = w_2 + 0.25[\cos(0.5*2) + \operatorname{sen}(0.75*2)]$$

$$w_3 = 1.6398053 + 0.25[0.5403023 + 0.9974949] = 2.0242546$$

Para  $i=3$

$$w_4 = w_3 + 0.25[\cos(0.5*3) + \operatorname{sen}(0.75*3)]$$

$$w_4 = 2.0242546 + 0.25[0.0707372 + 0.7780731] = 2.2364572$$

Resumen

$i$	$t_i = 0 + 0.25i$	$w_i$
0	0	1
1	0.25	1.25
2	0.50	1.6398053
3	0.75	2.0242546
4	1.00	2.2364572



A continuación se da la solución real al problema del valor inicial de este ejercicio:

$$y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{4}{3}$$

Compare la solución real con la solución por el método de Euler:

Para  $i=0$   $t=0$

$$y(t_0 = 0) = \frac{1}{2} \sin 2t_0 - \frac{1}{3} \cos 3t_0 + \frac{4}{3} = \sin 2(0) - \frac{1}{3} \cos 3(0) + \frac{4}{3}$$

$$y(t_0 = 0) = \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{3}(1) + \frac{4}{3}$$

$$\underline{\underline{y(t_0 = 0) = 1}}$$

Para  $i=1$   $t=0.25$

$$y(t_1 = 0.25) = \frac{1}{2} \sin 2t_1 - \frac{1}{3} \cos 3t_1 + \frac{4}{3} = \sin 2(0.25) - \frac{1}{3} \cos 3(0.25) + \frac{4}{3}$$

$$y(t_1 = 0.25) = \frac{1}{2}(0.4794255) - \frac{1}{3}(0.7316889) + \frac{4}{3}$$

$$\underline{\underline{y(t_1 = 0.25) = 1.3291498}}$$

Para  $i=2$   $t=0.5$

$$y(t_2 = 0.50) = \frac{1}{2} \sin 2t_2 - \frac{1}{3} \cos 3t_2 + \frac{4}{3} = \sin 2(0.50) - \frac{1}{3} \cos 3(0.50) + \frac{4}{3}$$

$$y(t_2 = 0.50) = \frac{1}{2}(0.8414709) - \frac{1}{3}(0.0707372) + \frac{4}{3}$$

$$\underline{\underline{y(t_2 = 0.50) = 1.730489}}$$

Para  $i=3$   $t=0.75$

$$y(t_3 = 0.75) = \frac{1}{2} \sin 2t_3 - \frac{1}{3} \cos 3t_3 + \frac{4}{3} = \sin 2(0.75) - \frac{1}{3} \cos 3(0.75) + \frac{4}{3}$$

$$y(t_3 = 0.75) = \frac{1}{2}(0.9974949) - \frac{1}{3}(-0.6281736) + \frac{4}{3}$$

$$\underline{\underline{y(t_3 = 0.75) = 2.0414719}}$$

Para  $i=4$   $t=1$

$$y(t_4 = 1) = \frac{1}{2} \sin 2t_4 - \frac{1}{3} \cos 3t_4 + \frac{4}{3} = \sin 2(1) - \frac{1}{3} \cos 3(1) + \frac{4}{3}$$

$$y(t_4 = 1) = \frac{1}{2}(0.9092974) - \frac{1}{3}(-0.9899924) + \frac{4}{3}$$

$$\underline{\underline{y(t_4 = 1) = 2.1179795}}$$

Comparación:

<b>i</b>	<b><math>t_i=1+0.25i</math></b>	<b><math>w_i</math></b>	<b><math>y(t_i)</math></b>	<b><math> y(t_i) - w_i </math></b>
1	0.25	1.25	1.3291498	0.0791498
2	0.50	1.6398053	1.7304898	0.0906845
3	0.75	2.0242546	2.0414719	0.0172173
4	1.00	2.2364572	2.1179795	0.1184777

[Regreso a la página principal.](#)